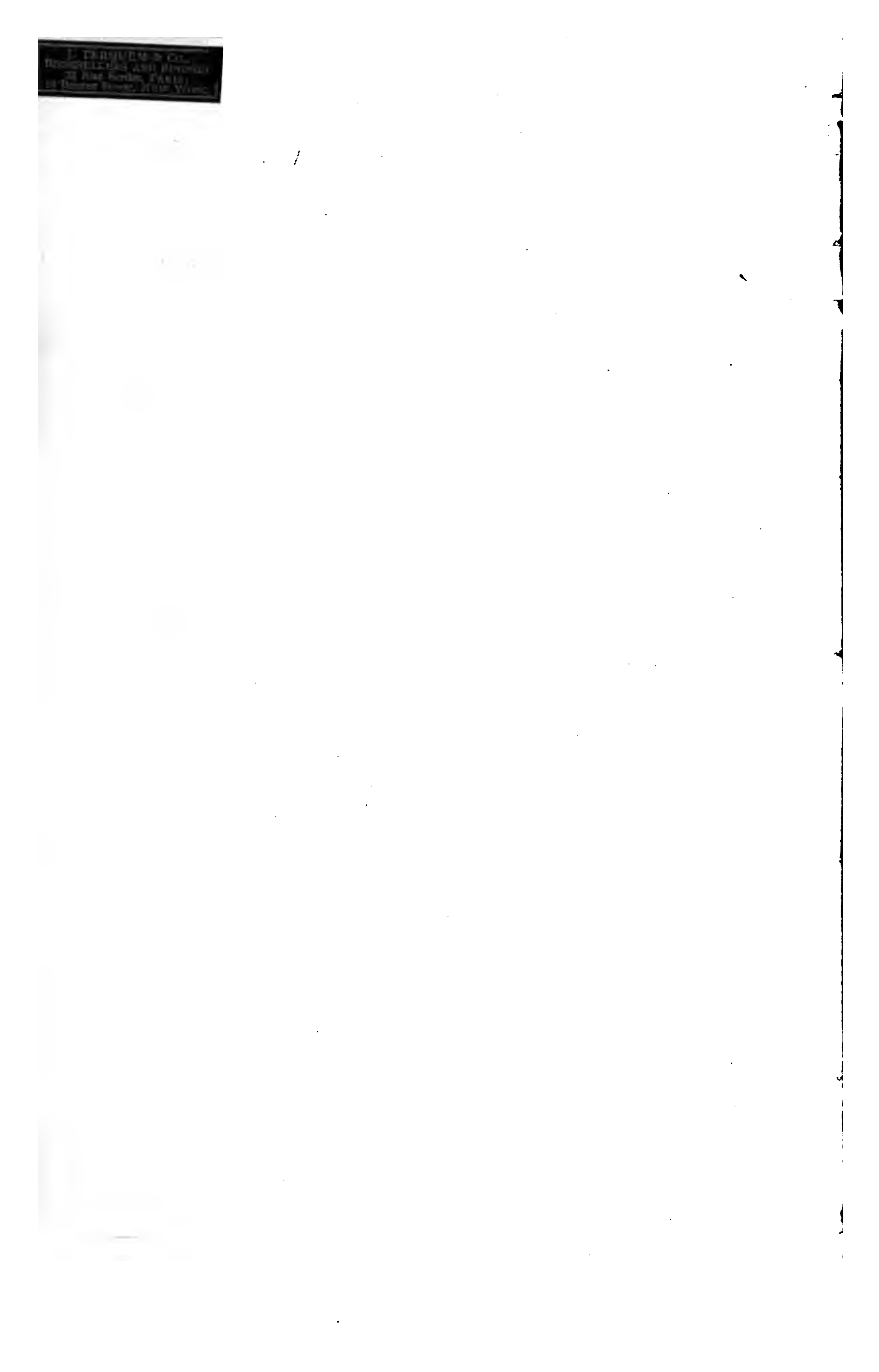

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





EXERCICES ET LEÇONS

D'ANALYSE

41292 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES ET LEÇONS

D'ANALYSE

PAR

R. D'ADHÉMAR.

QUADRATURES. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.
ÉQUATIONS INTÉGRALES DE M. FREDHOLM ET DE M. VOLTERRA.
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

PRÉFACE.

J'ai essayé d'écrire ce petit Livre dans le but d'être utile aux élèves des Universités.

Certes, il ne manque pas de beaux *Traités* ou *Cours* d'Analyse. En quelques points, très modestement, je cherche seulement à les compléter un peu, et c'est ce que je dois expliquer ici.

Il me semble d'abord que les étudiants, ceux surtout qui travaillent seuls, n'auront jamais trop de Livres d'Exercices. J'indique donc la solution de problèmes, presque tous posés à l'examen du Certificat de Calcul différentiel et intégral.

D'autres exercices sont fournis par les *transcendantes classiques,* qu'on rencontre incidemment dans beaucoup de recherches, et qu'il faut savoir manier.

Comme le faisait M. Painlevé, dans le Chapitre qu'il a annexé aux *Exercices* de Tisserand, je rappelle, au début, l'énoncé de quelques théorèmes importants, en tâchant d'être précis, et en m'efforçant de ne pas tomber dans cet excès de subtilité que M. H. Poincaré, au Congrès des Mathématiciens de 1908, a nommé le *Cantorisme.*

Voilà pour la première Partie, *très élémentaire,* de ce Livre.

En second lieu, j'esquisse le contour de quelques Leçons, sur des sujets dont l'étude est récente.

Par là même, ces questions, aujourd'hui en pleine évolution, n'étaient pas encore aptes à figurer dans les grands Ouvrages classiques.

Il me semble qu'elles pourront intéresser les étudiants dont l'esprit est curieux, et voici le point de vue auquel je me suis placé.

Dans la Théorie générale des fonctions, il faut partir de la série de Taylor et faire un prolongement analytique avec Weierstrass, ou bien il faut prendre pour point de départ le problème de Dirichlet, avec Riemann. Sinon, toute la théorie de Cauchy est comme suspendue en l'air.

Sans cela, par exemple, on ne peut introduire dans l'intégrale de Cauchy que les *trancendantes élémentaires*, e^z, Lz, arc tang$z$, etc.

J'ai choisi le principe de Dirichlet, parce qu'il conduit naturellement à une théorie très belle, celle de M. Fredholm, et aux équations de la Physique. Je parle donc des *équations intégrales,* dont chacun reconnaît aujourd'hui l'importance.

La solution du problème de Dirichlet va d'ailleurs faire réfléchir un étudiant, par le fait qu'à première vue il lui semblera qu'on est en contradiction avec l'énoncé du théorème d'existence classique, dit *théorème de Cauchy-Kowalesky,* sur les solutions des équations aux dérivées partielles. Mais c'est qu'un *contour fermé* ne correspond plus du tout à la démonstration de ce théorème classique.

Et voici donc un avertissement suggestif : un énoncé,

très général et très beau, n'épuise pas forcément une question. Il est bien d'autres théorèmes d'existence que ceux de Cauchy ([1]). D'ailleurs, des cas très intéressants peuvent se présenter où cet énoncé tombe en défaut.

Cela nous amènera à la théorie des *caractéristiques*, définies précisément comme *multiplicités d'exception* relativement au théorème de Cauchy.

Et la théorie des caractéristiques nous conduit à la classification des équations du second ordre, en types *elliptiques*, *hyperboliques*, *paraboliques*.

L'équation de Laplace est du type elliptique; nous indiquons, après la théorie du potentiel, la solution qui résulte de l'œuvre de M. Fredholm. Puis nous parlons de certaines équations du type hyperbolique, linéaires et complètement intégrées; en particulier, ceci nous permettra de montrer la valeur de deux idées qui, dans cet ordre, se rejoignent constamment et se complètent : la *Méthode de Riemann* et les *Approximations successives de M. É. Picard*.

Enfin, on a, à ce jour, assez peu de résultats très généraux sur le type parabolique. C'est encore une équation intégrale qui semble devoir jouer ici un rôle important. Nous donnons donc simplement, à ce sujet, une étude rapide du célèbre *problème d'inversion d'Abel* et des équations intégrales de M. Volterra.

Mon but sera atteint si j'ai amené quelques jeunes étudiants à réfléchir sur quelques-unes des hautes ques-

---

([1]) *Voir* les *Conférences* de M. Picard et la *Notice sur les travaux de M. Hadamard*. Paris, Gauthier-Villars.

tions que pose le Cours classique de la Licence ès Sciences mathématiques, si j'ai réussi à montrer des *faits* intéressants, et si j'ai ainsi aiguisé la curiosité de quelque lecteur.

M. Émile Picard a bien voulu me permettre d'user, pour ma rédaction, de ses belles Leçons, qui sont toujours un régal pour l'auditoire. J'ai largement profité de l'autorisation, en ce qui concerne les équations de M. Fredholm et de M. Volterra.

Il m'est agréable de dire à mon maître, à cette occasion, mon affectueuse et respectueuse reconnaissance.

Septembre 1908.

EXERCICES ET LEÇONS
D'ANALYSE.

INTRODUCTION.

Rappelons quelques formules importantes et quelques théorèmes fondamentaux.

I. — Géométrie.

Courbe plane. Rayon de courbure :

$$y = y(x), \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Courbe gauche. Formules de Frenet-Serret :

$$x(s), \quad y(s), \quad z(s), \qquad (s = \text{arc}),$$

$$\left.\begin{array}{l} A = dy\,d^2z - dz\,d^2y \\ B = dz\,d^2x - dx\,d^2z \\ C = dx\,d^2y - dy\,d^2x \end{array}\right\} \quad \delta = \|\, dx \quad d^2x \quad d^3x \,\| \quad (^1),$$

R = rayon de courbure, T = rayon de torsion.

Cosinus de la tangente : α, β, γ.
Cosinus de la normale principale : α', β' γ'.

(1) Ce symbole représente un déterminant dont on n'écrit que la première ligne.

Cosinus de la binormale : α'', β'', γ'',

$$\frac{1}{R^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{ds^6}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{\delta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R},$$

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \ldots.$$

Courbes tracées sur une surface :

1° Lignes de courbure : les normales à la surface le long de ces lignes forment une développable, ou bien le rayon de courbure est maximum (ou minimum);

2° Lignes asymptotiques : le plan osculateur est le plan tangent de la surface;

3° Lignes géodésiques : le plan osculateur est normal à la surface..

Coordonnées curvilignes. — La théorie des surfaces comporte l'emploi des coordonnées curvilignes

$$x(u, v); \quad y(u, v); \quad z(u, v),$$

$$ds^2 = \mathsf{S}\, dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(carré de différentielle, non différentielle du carré),

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

$$EG - F^2 = H^2 > 0.$$

Angle des directions d et δ :

$$\cos(ds, \delta s) = \mathsf{S}\, \frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta s}$$

$$= \frac{E\, du\, \delta u + F(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v}{\sqrt{E\, du^2 \ldots}\ \sqrt{E\, \delta u^2 \ldots}}.$$

Cosinus de la normale d'une surface : c, c', c'',

$$\mathrm{S}\, c\, dx = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{S}\, c x'_u = 0, \\ \mathrm{S}\, c x'_v = 0, \end{array} \right.$$

$$c = \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}.$$

On a les autres, en permutant circulairement, x, y, z.

Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \| x''_{u^2} \quad x'_u \quad x'_v \|, \\ \mathrm{D}' &= \| x''_{uv} \quad x'_u \quad x'_v \|, \\ \mathrm{D}'' &= \| x''_{v^2} \quad x'_u \quad x'_v \|. \end{aligned}$$

On a, de suite,

$$\mathrm{S}\, c\, d^2 x = \frac{1}{\mathrm{H}} (\mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2);$$

d'où les *asymptotiques*

$$\mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2 = 0.$$

Angle de la normale N *à la surface, avec la normale principale* n *d'une courbe de la surface.* — N a pour cosinus c, c', c''.

La courbe a pour cosinus de sa tangente a, a', a'', et pour sa normale principale n : b, b', b'',

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{r} \qquad (r \text{ rayon de courbure}),$$

$$a = \frac{dx}{ds},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{H}}{r} \cos(\mathrm{N}, n) = \frac{\mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2}{\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2},$$

d'où le théorème de Meusnier, et aussi les Lignes de courbure.

Soit R un maximum pour r, dans une section normale

$$|\cos(N, n)| = 1$$

(nous négligeons la question de signes).

Écrivons donc que l'équation

$$D\,du^2 + \ldots - \frac{H}{R}(E\,du^2 + \ldots) = 0$$

a ses racines égales

$$D\;du + D'\,dv - \frac{H}{R}(E\,du + F\,dv) = 0,$$

$$D'\,du + D''\,dv - \frac{H}{R}(F\,du + G\,dv) = 0;$$

d'où les *lignes de courbure*

$$(D\,du + D'\,dv)(F\,du + G\,dv) = (D'\,du + D''\,dv)(E\,du + F\,dv);$$

d'où les *rayons principaux*

$$0 = \begin{vmatrix} D - \frac{HE}{R} & D' - \frac{HF}{R} \\ D' - \frac{HF}{R} & D'' - \frac{HG}{R} \end{vmatrix}.$$

Soient R_1 et R_2 les rayons principaux, on a (O. Rodrigues)

$$dx + R_1\,dc = 0, \qquad dy + R_1\,dc' = 0, \qquad dz + R_1\,dc'' = 0,$$
$$\delta x + R_2\,\delta c = 0, \qquad \delta y + R_2\,\delta c' = 0, \qquad \delta z + R_2\,\delta c'' = 0,$$

d et δ sont les deux directions des lignes de courbure.

Les *lignes asymptotiques* sont encore données par

$$0 = \|\overline{d^2x} \quad x'_u \quad x'_v\|,$$
$$0 = dp\,dx + dq\,dy \qquad \text{pour} \qquad z = f(x, y).$$

Les *lignes de courbure* par

$$0 = \|\,dx \quad dA \quad A\,\|,$$

$A(u, v)$, B, C étant les paramètres (pas forcément les *cosinus*) de la normale

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq} \qquad \text{pour} \qquad z = f(x, y),$$

et alors l'équation en R_1, R_2 sera

$$(rt - s^2)R^2 - R\sqrt{1 + p^2 + q^2}[(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Surface développable

$$rt - s^2 = 0.$$

Ou bien : même plan tangent le long d'une génératrice

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q;$$

a, b, p, q, dépendent de α; ce qui donne

$$db\,dp - da\,dq = 0.$$

Surface réglée. — Le point central I est tel, qu'en I, le plan tangent fait un angle de 90° avec le plan tangent à l'infini,

$$\tang\theta = K\overline{IM} \qquad \text{(Chasles)},$$

θ est l'angle des plans tangents en M et en I, K est constant sur une génératrice.

Congruence de normales :

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q;$$

a, b, p, q dépendant de α, β.

Ces droites sont les normales d'une surface si l'on a

$$\frac{ap'_\alpha + bq'_\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}\,d\alpha + \frac{ap'_\beta + bq'_\beta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}\,d\beta = \text{différentielle exacte} = d\lambda(\alpha, \beta).$$

La surface est alors donnée par $z = \dfrac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$.

Surface moulure. — *Un* système de lignes de courbure est formé de courbes *planes* et situées dans des plans parallèles. Le plan étant celui des xy, on a

$$x = \psi(\alpha)\cos\alpha - \psi'(\alpha)\sin\alpha + \varphi(z)\cos\alpha,$$
$$y = \psi(\alpha)\sin\alpha + \psi'(\alpha)\cos\alpha + \varphi(z)\sin\alpha.$$

Le plan étant celui des xz, on aurait

$$s(1+p^2) - pqr = 0,$$
$$x = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varphi(y) - \psi'(\alpha),$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varphi(y) + \psi(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha).$$

II. — Intégrales et séries.
(Domaine réel.)

Une fonction $f(x)$, continue, a une intégrale, limite de somme.

L'intégrale existe encore si l'on a un *nombre fini* de discontinuités finies ou de discontinuités infinies de certain genre.

Exemple :

$$\int_A^a \frac{f(x)\,dx}{(a-x)^m}$$

est bien déterminé si l'on a $f(x)$ borné et $m < 1$.

Exemple :

$$\int_0^A \mathfrak{L}x\,dx \qquad (\mathfrak{L} = \text{logarithme})$$

est bien déterminé.

Dans certains cas, aussi, on peut prendre un champ d'intégration *infini*.

Exemple :

$$\int_A^\infty \frac{f(x)\,dx}{x^\mu}$$

est bien déterminé si l'on a $f(x)$ borné et $\mu > 1$.

Exemple :

$$\int_A^\infty \frac{\sin x\,dx}{x}$$

est bien déterminé.

Soit

$$F(x) = \int_A^x f(x)\,dx,$$

on a

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

F est l'intégrale générale ou primitive.

Si f est *rationnel,* F contient une partie rationnelle, des logarithmes et des arc-tangente.

Soit

$$f = R(\sin x, \cos x) \qquad (R = \text{rationnel}),$$

on peut intégrer, car $\sin x$ et $\cos x$ sont rationnels en $t = \operatorname{tang}\frac{x}{2}$.

Soit

$$f = e^{\omega x} R(x),$$

il s'introduit une transcendante nouvelle

$$\int \frac{e^x\,dx}{x} \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{dx}{l\,x} = \text{logarithme intégral.}$$

Soit

$$f = e^{\omega x} R(\sin x, \cos x),$$

nous avons la transcendante nouvelle

$$\int e^{\omega x} \cot\frac{x}{2}\,dx$$

(Hermite, *Cours d'Analyse,* 1873, Gauthier-Villars).

Soit P_n un polynome de degré n.

Si $f = R(x, \sqrt{P_2})$, on ramène aux fonctions rationnelles.

Si $f = R(x, \sqrt{P_n})$, on a des quadratures elliptiques ($n = 3, 4$) ou hyperelliptiques, dont la théorie des fonctions complexes montre le vrai sens. Soit

$$f = x^m(a + bx^n)^p,$$

on peut rendre rationnel si p ou $\frac{m+1}{n}$ ou $p + \frac{m+1}{n}$ est *entier*.

Soit une série $\sum u_n(x)$, si elle converge *uniformément*, elle représente une fonction continue, et l'on obtient l'intégrale en intégrant chaque terme.

Si $\sum \frac{du_n(x)}{dx}$ converge aussi uniformément, elle représente la dérivée de la somme $\sum u_n(x)$.

Même théorème pour une intégrale, où $f(x)$ contient un paramètre α, lorsque le champ est infini ou bien lorsque la fonction devient infinie, de façon que les intégrales convergent uniformément.

Changement de variable dans une intégrale. — Posons $x = \varphi(t)$, φ est continu, ainsi que φ', à *un* point x correspond *un* point t, et réciproquement.

Si $f(x)$ est continu, $f[\varphi(t)] = F(t)$ est continu, on a alors

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \qquad \begin{cases} a_2 = \varphi(t_2), \\ a_1 = \varphi(t_1). \end{cases}$$

Ceci suppose $\varphi'(t)$ non nul.

Si φ et φ' sont *discontinus* en t_2, les deux membres sont *égaux, tous deux déterminés* ou *tous deux indéterminés*.

On passe ainsi au cas où l'on a un nombre fini de discontinuités.

Même résultat pour un champ infini (1).

---

(1) Pour ces questions fondamentales, *voir*, par exemple, les Mémoires de M. C. Jordan et M. de la Vallée-Poussin, dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan, 1892.

Bien entendu, on passe au cas où φ' s'annule un nombre fini de fois.

Intégration par parties. — Quand il n'y a pas d'ambiguïté à craindre, $U^{(n)}$ ou U^n représente $\frac{d^n U}{dx^n}$.

$$\int UV^n\,dx = \Omega + (-1)^n \int VU^n\,dx,$$

$$\Omega = UV^{n-1} - U^1V^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}VU^{n-1}.$$

Soit le cas élémentaire

$$\int_a^b (f\varphi' + f'\varphi)\,dx = |f(x)\varphi(x)|_a^b.$$

1° Si f et φ sont *continus* dans le domaine ab, f' et φ' ayant des *discontinuités isolées*.

Si $\int_a^b f\varphi'\,dx$ *a un sens*, $\int_a^b f'\varphi\,dx$ *aura un sens.*

2° Si $b = \infty$, si *deux* des trois termes *ont un sens*

$$\int f\varphi'; \quad \int f'\varphi; \quad |f\varphi|_a^b,$$

le *troisième* est bien *déterminé.*

L'intégrale multiple est encore une limite de somme. Une intégrale multiple se réduit à des quadratures successives, dans un ordre arbitraire, si la fonction n'a qu'un nombre fini de discontinuités finies sur une parallèle quelconque aux axes.

S'il y a des discontinuités infinies ou si le champ d'intégration est infini, l'intégrale n'est déterminée que si cela a lieu, la fonction étant remplacée par son *module.*

Sinon on aurait l'analogue d'une série semi-convergente, dont la somme dépend de l'ordre des termes. C'est une différence profonde entre l'intégrale multiple et l'intégrale simple, qui tient à des considérations d'*Analysis situs.*

La dérivation, par rapport à un paramètre, donne lieu au même théorème que pour une quadrature simple.

On peut changer de variables, soit $x_i = \varphi_i(u_k)$, J est le jacobien

$$J = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right\|,$$

$$\underset{\Omega_x}{\mathrm{S}} F(x_i)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \underset{\Omega_u}{\mathrm{S}} F[\varphi_i(u_k)]\, |J|\, du_1\, du_2 \ldots du_n.$$

Ω_x et Ω_u sont les champs correspondants.

On suppose J continu et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points sur toute parallèle aux axes.

Étudions maintenant les intégrales *généralisées :* fonction ou champ infini.

Si la fonction ne change pas de signe, l'intégrale multiple se réduit à des quadratures successives, dans un ordre quelconque, si cette opération conduit à un résultat déterminé (l'infini compris); le théorème subsiste si, la fonction changeant de signe, la réduction est possible en prenant son *module.*

Quant au changement de variables, la formule subsiste, les deux intégrales sont *égales, déterminées ou indéterminées,* si, à la frontière, les dérivées des φ sont *discontinues,* si J est *nul,* si la fonction est *discontinue.*

Formule de Riemann, dans le plan. — Soit C un contour simple, coupé en deux points par une parallèle aux axes, (C) l'aire renfermée :

$$\int\int_{(C)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_C P\, dx, \qquad \int\int_{(C)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C Q\, dy,$$

$$\int\int_{(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_C P\, dx + Q\, dy.$$

Formule de Stokes-Ampère, dans l'espace. — Soit une portion de surface, ayant deux côtés, limitée à une courbe gauche. Ayant fixé un côté de la surface et un sens

sur la courbe

$$\int P(x,y,z)\,dx + Q\,dy + R\,dz$$
$$= \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz.$$

Formules de Green :

$$\int_3 \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \int_2 P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

(intégrale de volume) (intégrale suivant le bord extérieur de la frontière)

Dans l'espace (et aussi dans le plan),

$$J = \int_3 \mathbf{S} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

Δ indique $\mathbf{S}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ symbole de Laplace,

$$J = \int_2 U \,\mathbf{S} \frac{\partial V}{\partial x} \cos(n, x)\,d\sigma - \int_3 U\,\Delta V\,dx\,dy\,dz,$$

$d\sigma$ est l'élément de surface de la frontière du volume, n la normale extérieure

$$\int_3 (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dx\,dy\,dz = \int_2 \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\sigma,$$

$\frac{d}{dn}$ = dérivée normale extérieure.

Séries trigonométriques (variable réelle). — Cette étude s'impose : 1° dans la théorie des fonctions analytiques, pour étudier $f(z)$ sur le cercle de convergence; 2° pour avoir des *expressions analytiques* de fonctions *discontinues*.

L'étude élémentaire comporte les conditions de Dirichlet : $f(x)$ *borné* dans un intervalle $a - b$; n'ayant qu'un

nombre *fini* de discontinuités; sa variation ne changeant de sens qu'un nombre *fini* de fois.

Dans ces conditions

$$\lim_{K=\infty} \int_a^b F(\alpha) \frac{\sin K\alpha}{\sin\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}[F(+0) + F(-0)] \qquad (a < 0 < b),$$

$$\lim_{K=\infty} \int_0^\pi F(\alpha) \frac{\sin(2K+1)\alpha}{\sin\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}[F(+0) + F(\pi-0)].$$

Ceci suppose que F n'est *infini* qu'en des points isolés (non en $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$);

Que l'intégrale de $|F|$ est *finie* et déterminée;

$f(x)$ dans l'intervalle $0 - 2\pi$ peut être représenté par

$$S = \frac{1}{2} a_0 + \sum a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin m\alpha\, d\alpha.$$

Pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$,

$$S = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)].$$

Si $f(x)$ peut devenir *infini* en des points ξ en nombre fini; si l'intégrale de $|f(x)|$ est *finie*, la formule subsiste, sauf en ξ.

Dans un intervalle $a - b$, $0 < a < b < 2\pi$, où $f(x)$ est *continu*, S converge *uniformément*.

Entre 0 et 2π, nous avons un seul développement uniformément convergent, celui de Fourier.

Peut-on avoir un autre développement, à convergence non uniforme, pour $f(x)$?

La fonction satisfaisant à certaines conditions (de Dirichlet ou de C. Jordan, ou définies par des propriétés de certains *ensembles*), la réponse est négative.

Signalons un théorème de P. du Bois-Reymond :

Lorsque $\int_0^b \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x)\, dx$ *a une limite pour* $n = \infty$,

cette limite ne peut être que $\frac{\pi}{2}f(+0)$. (*Voir* les *Leçons de M. Lebesgue,* coll. Borel, et le Mémoire de M. Hurwitz, *Ann. Éc. Norm.,* 1902.)

III. — Fonctions d'une variable complexe.

Si nous avons une fonctions réelle $f(x)$, si elle admet n dérivées, la $(n+1)^{\text{ième}}$ restant finie, mais n'étant pas dérivable, on peut employer la *formule finie* de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} f^{(n+1)}(x+\theta h),$$
$$0 < \theta < 1.$$

Dans quel cas peut-on passer à la *série infinie* de Taylor? La théorie des fonctions répond à cette question ([1]).

Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions réelles, déterminées, dérivables.

Il faut et il suffit :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Ou bien :

$$\delta P = 0 = \delta Q \qquad \left(\delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot \text{ symbole du } \textit{Laplacien}\right).$$

Alors $P + iQ$ est fonction de $x + iy$, fonction holomorphe, ou synectique, ou régulière, ou monodrome, c'est-à-dire *déterminée, ainsi que sa dérivée, et continue*

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

synectique. Donc : *toutes les dérivées sont synectiques.*

([1]) *Voir* Coll. Borel (Gauthier-Villars).

Par définition, on pose

$$\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^B (P\,dx - Q\,dy) + i(Q\,dx + P\,dy).$$

On va de A en B par un chemin quelconque.

$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ est *indépendant du chemin*, c'est une fonction synectique F, sa dérivée est f. Donc : *toutes les intégrales sont synectiques*. Nous avons l'analogue du théorème de la moyenne

$$\left|\int_A^B f(z)\,dz\right| < M \times \text{arc}\,AB,$$

M étant supérieur au module maximum de f sur l'arc.

(Si la fonction devient infinie, ou l'arc AB, *voir* plus loin l'extension de la notion d'intégrale.)

Remarquons que $f(z)$ donne une *Carte* du chemin de z.

Dans *une région* S du plan de $z = x + iy$, si la fonction est *holomorphe, sauf* en des points ou groupes de points qui n'interrompent pas la continuité de S, la fonction est dite ANALYTIQUE [J. HADAMARD, *La série de Taylor* (coll. *Scientia*)].

$f(z)$ est développable en série de Taylor si elle est holomorphe dans une aire finie

$$f(z) = \mathfrak{P}(z - z_0) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots \quad \text{(Cauchy)}.$$

Le développement converge dans tout *cercle* de centre z_0 où f reste holomorphe.

Si la fonction cesse d'être holomorphe en un point isolé z_1, on a le développement suivant, convergent dans un *anneau* de centre z_1, *isolant* z_1,

$$f(z) = \mathfrak{P}(z - z_1) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) \quad \text{(Laurent)}.$$

D'où la définition du *pôle* et du *point singulier essentiel*.

Tout ceci se déduit de la formule

$$2i\pi f(x) = \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

x est intérieur au domaine (C) dans lequel $f(z)$ est holomorphe.

On peut dériver

$$2i\pi f^{(n)}(x) = \underline{|n} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Si le domaine est un cercle de rayon R, de centre O, M étant le module maximum de f sur la circonférence, on a

$$|f^{(n)}(0)| < \frac{\underline{|n}}{R^n} M,$$

d'où la *majorante*, pour f,

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-\dfrac{z}{R}}.$$

Cela s'étend au cas de p variables.

Si $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan :

1° Et de module borné, c'est une constante;

2° Et telle que $\left|\dfrac{f(z)}{z^m}\right|$ soit borné, c'est un polynome de degré m.

Si $f(z)$ est analytique dans tout le plan :

1° Et n'ayant comme singularité que le point infini, pôle d'ordre m, c'est un polynome de degré m;

2° Et n'ayant comme singularités que des pôles, même au point infini, c'est une *fonction rationnelle*.

Une fonction analytique qui n'a, à distance finie, que des pôles, est dite *méromorphe*. Elle est le quotient de deux *fonctions entières*, c'est-à-dire holomorphes dans tout le plan.

Soit une fonction F, holomorphe dans un domaine (C) sauf en des points isolés. En un tel point z_1, on a un

terme $\frac{A_{-1}}{z - z_1}$; A_{-1} s'appelle *résidu*

$$\int_C F(z)\,dz = 2\pi i \sum_C A_{-1}$$

Soit F une fonction analytique n'ayant que des pôles, φ une fonction synectique.

Soit π un pôle de F et ρ une racine, on a

$$\int_C \varphi(z)\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = 2\pi i \left\{ \sum_C [\varphi(\rho) - \varphi(\pi)] \right\},$$

$\sum_C$ est la sommation étendue au domaine (C). Le pôle (ou racine) multiple d'ordre k sera compté k fois.

Tout ceci est dû à Cauchy. On en déduit le théorème de d'Alembert.

Fonctions élémentaires.

Logarithme. — Soit $z = \rho e^{i\varphi}$,

$$\mathcal{L}z = \int^z \frac{dz}{z} = \mathcal{L}\rho + i\varphi.$$

Ce sera déterminé si φ est *fixé,* c'est-à-dire si l'on trace une coupure artificielle de o à l'infini, qu'on ne traversera pas.

Ayant bien défini l'argument φ, on a

$$\mathcal{L}zz' = \mathcal{L}z + \mathcal{L}z', \qquad \ldots.$$

Exponentielle. — Soit e^z la fonction inverse de $\mathcal{L}z$, on trouve $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, donc nous retombons sur les définitions élémentaires.

Puissance de z,

$$z^m = e^{m\mathcal{L}z}, \qquad m = \alpha + i\beta, \qquad z^m = Re^{i\Phi},$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta \neq 0, & \text{R a une infinité de valeurs,} \\ \alpha \text{ non rationnel,} & \Phi \text{ a une infinité de valeurs.} \end{array} \right.$$

Ayant bien fixé $\mathcal{L}z$, c'est-à-dire R et Φ, on a encore

$$(z^m)' = m z^{m-1}.$$

Les propriétés élémentaires prennent une forme un peu plus compliquée que dans le réel.

Soit

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2k\pi)},$$

z ne change pas par k circulations autour de o. Mais ce mouvement fera s'échanger entre elles des puissances *rationnelles* de z.

Ceci a donné naissance aux feuillets de Riemann.

Par exemple, $z^{\frac{1}{2}}$ n'est holomorphe que si l'on trace une coupure artificielle $0 - \infty$.

De même, $\mathcal{L}\frac{z+1}{z-1}$ et $\sqrt{z^2-1}$ sont holomorphes, si l'on trace une coupure entourant complètement $+1$ et -1.

Arc tangente et arc sinus. — Intégrons

$$\frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z-i} - \frac{dz}{z+i}\right),$$

nous obtenons

$$\text{arc tang}\, z = \frac{1}{2i}[\mathcal{L}(z-i) - \mathcal{L}(z+i) + 2k\pi i].$$

On obtient des branches synectiques si l'on trace, à partir de $+i$ et $-i$, des coupures qu'on ne traverse pas,

$$\text{arc sin}\, z = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

On obtient des branches synectiques si l'on trace, à partir de $+1$ et -1, des coupures qu'on ne traverse pas.

On a encore

$$\text{arc sin}\, z = \frac{1}{i}\mathcal{L}(iz \pm \sqrt{1-z^2}).$$

Or

$$(iz + \sqrt{})(iz - \sqrt{}) = -1.$$

On a donc, comme pour le *réel*,

$$\text{arc tang} z = \alpha + k\pi,$$

$$\text{arc sin} z = \begin{cases} \alpha + 2k\pi, \\ (2k+1)\pi - \alpha. \end{cases}$$

Intégrale complexe généralisée. — Dans le domaine (C), si autour d'un point b on a

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{|z-b|^\alpha} \qquad (\alpha < 1).$$

Soit

$$\varphi = \arg.(z-b).$$

Si l'on arrive en b par un chemin L tel que

$$\varphi_0 < \varphi < \varphi_1,$$

l'intégrale est déterminée et indépendante du chemin L.

Même théorème pour un chemin Λ s'étendant à l'infini, si φ finit par rester entre φ_0 et φ_1 et si

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^\beta} \qquad (\beta > 1).$$

Dans les cas les plus ordinaires, la condition relative à φ n'interviendra pas (C. Jordan, *Cours*, t. II).

Remarque.

Si l'on veut pouvoir parler de fonctions analytiques, autres que les combinaisons des transcendantes élémentaires, il faut :

1° Ou bien, avec Weierstrass, prendre pour départ la série $\sum a_n z^n$ (prolongement analytique, etc.);

2° Ou bien, avec Riemann, prendre pour départ le problème de Dirichlet (solution de $\delta u = 0$, déterminée par les valeurs de u sur un *contour fermé* du plan xy).

IV. — Équations différentielles. Théorèmes d'existence.

Soit une fonction *holomorphe,* développée en série, M le module maximum, $r_1, r_2, \ldots$ des nombres moindres que les rayons de convergence *associés;* G_1, G_2 et leurs combinaisons sont des *majorantes*

$$G_1 = \frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{r_1}\right)\left(1-\frac{x_2}{r_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{r_n}\right)},$$

$$G_2 = \frac{M}{1-\frac{x_1}{r_1}-\frac{x_2}{r_2}-\ldots-\frac{x_n}{r_n}}.$$

Voici, alors, le principe du *Calcul des Limites* de Cauchy.

Soit $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ analytique.

Écrivons

$$\frac{dz}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{z}{b}\right)},$$

s'il y a une solution z, holomorphe, il existe une solution y, holomorphe, *a fortiori,* autour de l'origine.

Dans le plan de x, on aura à prendre le plus petit des deux cercles

$$a, \qquad \rho = a\left(1-e^{-\frac{b}{2Ma}}\right),$$

pour un système de n équations du premier ordre,

$$\rho = a\left(1-e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}}\right).$$

La méthode des *approximations successives* de M. Picard donne, au lieu de ρ,

$$\rho' = \frac{b}{M} > \rho$$

(E. Picard, *Traité d'Analyse,* t. II et III).

Le calcul des limites et les approximations successives s'appliquent aussi aux fonctions implicites (E. Fouët, *Leçons*, et M. Goursat, *Bull. Soc. math.*, 1903).

Rappelons la méthode fondamentale de *Cauchy-Lipschitz*, où l'on regarde la différentielle comme une *différence;* la méthode d'approximations de M. de la Vallée-Poussin (*Cours d'Analyse*); la démonstration de M. Féjer, qui ramène immédiatement aux *quadratures* (*Comptes rendus*, 10 décembre 1906).

Lorsque $f(x, y)$ satisfait à *la condition de Lipschitz*, bien plus large que la condition d'analycité

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| < K|y_1 - y_0|,$$

on peut affirmer l'*unicité de la solution.*

V. — Équations aux dérivées partielles.

Après les travaux classiques, sur ce sujet, M. Goursat a fait l'extension directe du calcul des limites.

Soit $p = f(x, y, z, q)$ analytique.

M. Goursat remplace x par $\frac{x}{\alpha}$ dans la majorante

$$0 < \alpha < 1.$$

Remplaçant z par $z + ax$, f ne contient pas de constante, d'où

$$G = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha} + y + z}{R}\right)\left(1 - \frac{q}{\rho}\right)} - M;$$

posant

$$x + \alpha y = u,$$

on a l'équation majorante

$$\frac{dz}{du} = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{u}{\alpha} + z}{R}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\frac{dz}{du}\right)}.$$

On a donc une surface solution *passant par une courbe donnée*. A moins que la courbe ne soit *caractéristique* (c'est la définition).

1. *Équation linéaire :* $P(x, y, z)p + Qq = R$. — Caractéristiques :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

une caractéristique en *un* point (x^0, y^0, z^0).

La solution passant par une courbe C est formée par l'ensemble des caractéristiques des points de la courbe C.

2. *Équation quelconque :* $F(x, y, z, p, q) = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X\ldots, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = P\ldots.$$

Caractéristiques :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ} (= dt).$$

1° *Un conoïde* de ces courbes en *un* point (x^0, y^0, z^0).

La solution passant par une courbe C s'obtient en menant par la tangente à C un plan tangent au conoïde et en prenant la caractéristique définie par le contact sur le conoïde.

C étant

$$x^0(u), \quad y^0(u), \quad z^0(u),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F[x^0(u), \quad y^0, \quad \ldots, \quad q^0] = 0, \\ \dfrac{dz^0}{du} - p^0 \dfrac{dx^0}{du} - q^0 \dfrac{dy^0}{du} = 0. \end{array} \right.$$

Le conoïde des caractéristiques est une solution.

2° Soit une *intégrale première* du système des caractéristiques $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$; F et Φ permettent d'exprimer p et q en x, y, z ; alors

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

donne une *intégrale complète* de F,

$$V(x, y, z, a, b) = 0.$$

Et l'on obtient une *intégrale générale* en posant

$$b = \varphi(a) \qquad (\varphi \text{ arbitraire}),$$

et en prenant l'enveloppe des surfaces V.

Même théorie si l'on a n variables indépendantes [1].

---

[1] Ceci présente des difficultés. Il faut se reporter au beau Mémoire de M. DARBOUX, *Mémoires des savants étrangers*, Institut de France, 1883, et aux Ouvrages de SOPHUS LIE, *Differential-Gleichungen*, 1891; *Berührungs-Transformationen*, 1896, Teubner, Leipzig. — *Voir* aussi les *Leçons* de M. GOURSAT, 3 vol., Hermann.

CHAPITRE I.

QUADRATURES.

FORMULES DE WALLIS ET DE STIRLING.

1. *Soit*

$$H_n = \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

démontrer la relation suivante :

$$\lim_{n=\infty} (n H_n^2) = \frac{\pi}{2},$$

en déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, *et de* $n!$ *pour* n *très grand.*

En intégrant par parties, on trouve de suite

$$(1)\qquad H_{n+1} = \frac{n}{n+1} H_{n-1},$$

d'où :

$$H_{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{\pi}{2},$$

$$H_{2n+1} = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

Faisons le produit

$$(2)\qquad (2n+1)H_{2n}H_{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Il faut prouver que H_{2n} et H_{2n+1} ont même limite, pour $n=\infty$. Cela résulte de l'inégalité

$$H_{2n} > H_{2n+1} > H_{2n+2},$$

d'où

$$H_{2n} > H_{2n+1} > H_{2n}\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Nous avons donc

$$\lim_{n=\infty}[(2n+1)H_{2n+1}^2] = \frac{\pi}{2},$$

ou encore

$$\lim_{n=\infty}\left(\sqrt{n}\,H_{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dans H_{2n+1}, faisons $x^2 = 1 - z^2$, puis

$$z = \frac{u}{\sqrt{n}},$$

d'où

(3) $$\sqrt{n}\,H_{2n+1} = \int_0^{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du.$$

Cherchons la limite de l'intégrale. D'abord

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \int_0^L + \int_L^\infty.$$

La deuxième intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{L}$.

Menons n assez grand pour que l'on ait

$$\left|\left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n - e^{-u^2}\right| < \varepsilon,$$

ε étant tel que $L\varepsilon$ tende vers zéro quand L croît indéfiniment.

Le deuxième membre de l'égalité (3) a donc même limite que $\int_0^L e^{-u^2}\,du.$

D'où

(4) $$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Connaissant cette valeur et intégrant la même fonction sur un triangle formé par l'axe Ox, la première bissectrice,

et un cercle de rayon très grand, dans le plan de la variable complexe, on obtient les *intégrales de Fresnel*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La formule de Wallis a été obtenue

$$(5) \qquad \frac{\pi}{2} \sim (2n+1)\,H_{2n+1}^2,$$

ceci s'écrit aussi bien, en posant :

$$\varphi(x) = \frac{x!}{\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}},$$

$$(5') \qquad 1 \sim \frac{\overline{\varphi(x)}^2}{\varphi(2x)}.$$

On peut encore remplacer φ par $\psi = \varphi . e^x$

$$\frac{\psi(x)}{\psi(x+1)} = e^{-1+\left(x+\frac{1}{2}\right) L \left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\theta}{x^2}},$$

$$|\theta| < 1.$$

Faisons le produit

$$\frac{\psi(x)}{\psi(x+1)}\;\frac{\psi(x+1)}{\psi(x+2)}\;\cdots,\;\frac{\psi(2x-1)}{\psi(2x)},$$

d'où

$$\frac{\psi(x)}{\psi(2x)} = e^{\frac{\theta_1}{x^2}} = e^{\frac{\theta_1}{x}},$$

$$|\theta_1| < 1,$$

d'où

$$(5'') \qquad \frac{\psi(x)}{\psi(2x)} \sim 1,$$

d'où

$$\psi(x) \sim 1,$$

d'après (5′) et (5″),

$$\underline{|x} \equiv x! = \sqrt{2\pi}\,e^{-x}\,x^{x+\frac{1}{2}}(1+\varepsilon_x) \qquad \text{(Stirling)},$$

ε_x tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

Par la théorie de la fonction gamma, on a une meilleure approximation.

2. *Calculer l'intégrale double*

$$\iint x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} (1-x-y)^{\frac{2}{3}}\, dx\, dy,$$

étendue à l'aire du triangle formé par les droites

$$x=0, \qquad y=0, \qquad x+y-1=0.$$

$$y^{\frac{1}{3}}(1-x-y)^{\frac{2}{3}}\, dy = y\,[(1-x)\,y^{-1}-1]^{\frac{2}{3}}\, dy$$

est une différentielle binome intégrable. On pose

$$\frac{1-x}{y}-1=t,$$

d'où

$$y\,[(1-x)\,y^{-1}-1]^{\frac{2}{3}}\, dy = -\frac{(1-x)^2}{(t+1)^3}\, t^{\frac{2}{3}}\, dt,$$

$$I=\int_0^{1-x} y^{\frac{1}{3}}(1-x-y)^{\frac{2}{3}}\, dy = (1-x)^2\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{2}{3}}\, dt}{(t+1)^3}.$$

Or

$$\frac{t}{(t+1)^3}=\frac{t+1-1}{(t+1)^3}=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t+1)^3};$$

d'où

$$\frac{I}{(1-x)^2}=\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{3}}\, dt}{(t+1)^2}-\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{3}}\, dt}{(t+1)^3}.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{2}{3}-1}\, dt}{t+1}=\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=K.$$

Remplaçons t par $\frac{t}{a}$

$$J=\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{3}}\, dt}{t+a}=Ka^{-\frac{1}{3}}.$$

Dérivons deux fois par rapport à a

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{3}}\,dt}{(t+a)^2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{K}a^{-\frac{4}{3}}, \qquad \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{3}}\,dt}{(t+a)^3} = \frac{2}{9}\,\mathrm{K}a^{-\frac{1}{3}};$$

faisant $a = 1$, il vient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \mathrm{K}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = \frac{\mathrm{K}}{9} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

D'où la valeur cherchée

$$\frac{32\sqrt{3}\,\pi}{2835}.$$

3. *Démontrer que les deux intégrales*

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\sin zx}{\sqrt{z}}\,dz, \qquad v = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\cos zx}{\sqrt{z}}\,dz$$

satisfont à un système d'équations différentielles du premier ordre. Intégrer.

Intégrons par parties :

$$(1) \qquad u = -2\int_0^\infty \sqrt{z}\,d(e^{-z}\sin zx) = -2\frac{dv}{dx} - 2x\frac{du}{dx},$$

$$(2) \qquad v = 2\frac{du}{dx} - 2x\frac{dv}{dx}.$$

Tel est le système (1), (2).

Posons

$$u = v\mathrm{W},$$

d'où

$$\frac{2\mathrm{W}'}{1+\mathrm{W}^2} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad 2\,\mathrm{arc\,tang}\,\mathrm{W} = \mathrm{arc\,tang}\,x.$$

Posons

$$x = \mathrm{tang}\,\theta, \qquad \mathrm{W} = \mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2} = \frac{u}{v}.$$

Soit donc

$$u = \lambda \sin\frac{\theta}{2}, \qquad v = \lambda\cos\frac{\theta}{2},$$

on aura

$$\lambda = C\sqrt{\cos\theta},$$

ce qui donne u et v. Il suffit d'obtenir C.

D'ailleurs :

$$u^2 + v^2 = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\overline{u(0)}^2 + \overline{v(0)}^2 = C = \left(\int_0^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{\sqrt{z}}\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

4. *Trouver les intégrales de l'équation différentielle du second ordre*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^2(y-1)$$

qui sont des fonctions rationnelles ou simplement périodiques de x. (Sorbonne.)

On a

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 4(y^3 - y^2)\frac{dy}{dx}$$

et, en intégrant,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^4 - \frac{4}{3}y^3 + c, \qquad x + \alpha = \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 - \frac{4}{3}y^3 + c}};$$

y est, en général, une fonction de x admettant *deux* périodes.

1° Si $c = 0$, on a

$$x + \alpha = \int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\frac{1}{y}}} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{3}\frac{1}{y}},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 (x+\alpha)^2 = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{y}, \qquad y = \frac{12}{[3 - 2(x+\alpha)][3 + 2(x+\alpha)]};$$

2° Il y a encore une valeur de c pour laquelle le poly-

nome sous le radical n'est plus de degré 4. Posons

$$y^4 - \frac{4}{3}y^3 = c = (y-a)^2(y^2 + 2by + \beta),$$

$$a = 1, \qquad b = \beta = \frac{1}{3}, \qquad c = a^2\beta\frac{1}{3},$$

$$x + \alpha = \int \frac{dy}{(y-1)\sqrt{y^2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}}},$$

y n'a plus qu'*une* période.

Posons

$$y = 1 + z \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{u},$$

$$x + \alpha = \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 + \frac{8}{3}z + 2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{2u^2 + \frac{8}{3}u + 1}},$$

$$(x + \alpha)\sqrt{2} = -\mathfrak{L}\left(u + \frac{2}{3} + \sqrt{u^2 + \frac{4}{3}u + \frac{1}{2}}\right),$$

$$e^{-(x+\alpha)\sqrt{2}} = u + \frac{2}{3} + \sqrt{u^2 + \frac{4}{3}u + \frac{1}{2}},$$

ou, en modifiant la constante,

$$e^{-(x+k)\sqrt{2}} = \lambda\left(u + \frac{2}{3} + \sqrt{u^2 + \frac{4}{3}u + \frac{1}{2}}\right).$$

Prenons $\lambda = 3\sqrt{2}$, écrivons l'équation aux inverses des deux membres, le radical s'élimine,

$$y - 1 = \frac{-6\sqrt{2}}{e^{(x+k)\sqrt{2}} - e^{-(x+k)\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}}.$$

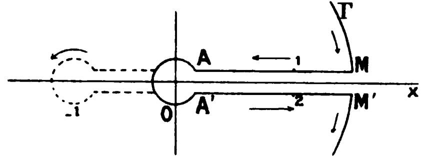
5. *Calculer*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\mathfrak{L}x\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathfrak{L}x}{(1+x)^2}\,dx.$$

L'intégrale est bien définie et se peut calculer, dans le domaine réel, en remarquant que $(\mathfrak{L}x)' = \frac{1}{x}$.

Première intégrale. — Dans le domaine complexe, prenons le contour ci-dessus : lacet autour de o, de -1,

Fig. 1.



cercle Γ de rayon très grand et introduisons la fonction

$$F = \frac{z}{(1+z)^3}(\mathcal{L}z)^2.$$

En un point 1, prenons

$$\mathcal{L}z = \mathcal{L}x;$$

en 2, on aura

$$\mathcal{L}z = \mathcal{L}x + 2\pi i,$$

d'où

$$(1) \qquad 4\pi i \int_{A'}^{M'} \frac{x\mathcal{L}x}{(1+x)^3}\,dx - 4\pi^2 \int_{A'}^{M'} \frac{x\,dx}{(1+x)^3} + 2\pi i\rho + \int_{-\Gamma} = 0.$$

Pour le grand cercle, on a *zéro* quand $\frac{1}{R}$ tend vers zéro. Calculons le résidu ρ, au point -1,

$$z = (-1)(1-\zeta), \qquad \mathcal{L}z = i\pi - \zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \ldots,$$

$$(\mathcal{L}z)^2 = i\pi^2 - 2i\pi\zeta + (1 - i\pi)\zeta^2 - \ldots,$$

$$\rho = \text{coeff. de } \frac{\zeta^2}{\zeta^3} = i\pi - 1 - 2i\pi = -i\pi - 1.$$

Soit J l'intégrale cherchée, a la seconde intégrale, dans (1), lorsque A' tend vers zéro et M' vers ∞; l'équation (1) devient

$$(2) \qquad 4\pi i J - 4\pi^2 a - 2\pi i(\pi i + 1) = 0,$$

d'où

$$J = \frac{1}{2}, \qquad a = \frac{1}{2}.$$

Deuxième intégrale. — Même contour.

Prenons

$$F = \frac{\sqrt{z}\,\mathcal{L}z}{(1+z)^2}.$$

En un point 1

$$F_1 = \frac{+\sqrt{x}\,\mathcal{L}x}{(1+x)^2},$$

en un point 2

$$F_2 = \frac{-\sqrt{x}(\mathcal{L}x + 2\pi i)}{(1+x)^2},$$

d'où

$$(1) \qquad -2\int_{A'}^{M'} \frac{\sqrt{x}\,\mathcal{L}x\,dx}{(1+x)^2} - 2i\pi\int_{A'}^{M'} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} + 2\pi i\rho + \int_{-\Gamma} = 0.$$

Pour le grand cercle Γ, on a *zéro*.

Calculons ρ

$$\mathcal{L}z = i\pi - \zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \ldots,$$

$$\sqrt{z} = i\left(1 - \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^2}{4} - \ldots\right),$$

$$\rho = \text{coeff. de } \frac{\zeta}{\zeta^2} = \frac{\pi}{2} - i.$$

Faisons tendre A′ vers 0, M′ vers ∞, soit J′ l'intégrale cherchée, à l'autre ; nous avons

$$(2) \qquad -2J' - 2\pi i a' + 2\pi i\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = 0,$$

$$J' = \pi, \qquad a' = \frac{\pi}{2}.$$

6. *Calculer*

$$J = \int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx.$$

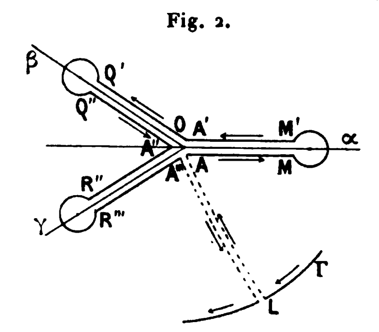
Soient α, β, γ les points représentant les racines cubiques de 1

$$1, \qquad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad \varepsilon^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

Le système des lacets entourant α, β, γ rend *uniforme* la fonction $\sqrt[3]{1-z^3}$.

Soit Γ un cercle de rayon R très grand, décrivons le contour total fermé en partant de A avec la détermination

Fig. 2.



réelle ou de moindre argument que nous écrivons $(\sqrt[3]{1-z^3})_1$. Quand A tend vers o et M vers α, les intégrales sur AM et M' A' donnent

$$J - \varepsilon J.$$

Sur A'Q', on a

$$z = r\varepsilon, \qquad r = |z|,$$

et notre fonction est devenue, à cause du lacet α,

$$\varepsilon(\sqrt[3]{1-z^3})_1 = \varepsilon\sqrt[3]{1-r^3},$$

d'où

$$\int_0^1 r\bar{\varepsilon}\,\varepsilon\sqrt[3]{1-r^3}\,\varepsilon\,dr = J.$$

Chaque lacet donne donc

$$J - \varepsilon J.$$

Il faut calculer l'intégrale suivant Γ.

Imaginons la coupure AL tracée le long de Ox, avec un demi-cercle autour de α. Entre α et $+\infty$, on a

$$(\sqrt[3]{1-z^3})_1 = \varepsilon^{\bar{2}}(\sqrt[3]{z^3-1})_1.$$

Posons

$$z = \frac{1}{u}, \qquad dz = \frac{-du}{u^2},$$

et u parcourt, *en sens inverse,* un cercle très petit c quand z parcourt un cercle très grand C

$$\int_{-C} = \int_{-c} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{u^2}\left(1 - \frac{u^3}{3} - \ldots\right)\frac{du}{u^2} = \frac{2\pi i}{3}\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$3J(1-\varepsilon) + \frac{2\pi i}{3}\varepsilon^{\frac{1}{2}} = 0,$$

d'où

$$J = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

7. *Calculer*

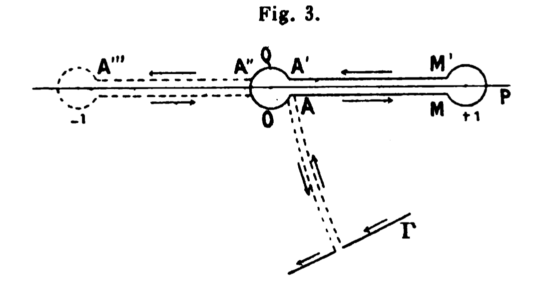
$$K = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\,dx.$$

Dans le domaine réel, faire $x = \frac{1}{y}$.

Dans le complexe, on rend *uniforme* la fonction par le lacet entourant o et $+1$.

Nous avons, au point -1, un résidu à prendre, puis une

Fig. 3.



intégrale suivant $-\Gamma$, comme précédemment, ou résidu à l'infini.

On part, en A, avec la détermination réelle, que nous écrivons $\left[\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right]_1$.

Au point A''', posons

$$z+1=\zeta, \qquad |z|=1-\zeta,$$

et l'*argument* de z est π.

D'où

$$\left(z^{\frac{2}{3}}\right)_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}(1-\zeta)^{\frac{2}{3}}.$$

De même

$$|1-z| = 2-\zeta,$$

et l'*argument* est 2π, à cause du lacet MPM'.

D'où

$$\left[(1-z)^{\frac{1}{3}}\right]_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}(2-\zeta)^{\frac{1}{3}}.$$

Pour avoir le *résidu* au point -1, nous avons donc à former le produit

$$\varepsilon^2 2^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{3}\zeta - ..\right)\left(1-\frac{1}{6}\zeta - \ldots\right).$$

Le coefficient de ζ^2 est

$$\varepsilon^2 A = \frac{A}{\varepsilon}.$$

C'est le résidu cherché.

Les intégrales sur AM et M'A' donneront $K(1-\varepsilon)$ et l'intégrale sur Γ tend vers *zéro* avec $\frac{1}{R}$, d'où

$$K(1-\varepsilon) \quad + 2\pi i \frac{A}{\varepsilon} = 0,$$

$$K(\varepsilon-\varepsilon^2) = -2\pi i A,$$

$$A = -\frac{2^{\frac{1}{3}}}{9}, \qquad B = 2\sin\frac{2\pi}{3}, \qquad \varepsilon-\varepsilon^2 = iB,$$

d'où la valeur cherchée de K.

8. *Démontrer la relation*

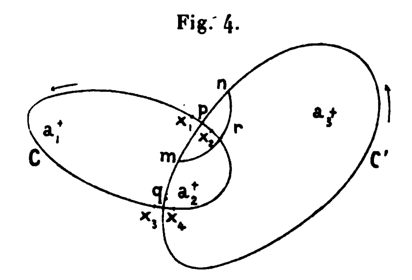
$$\int_C \int_{C'} \frac{U(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}} = 4\pi i.$$

P *est un polynome de degré* n, U *est défini par l'identité*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(y-x)\sqrt{P(y)}}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{P(y)}}{(x-y)\sqrt{P(x)}}\right]=\frac{U(x,y)}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}}.$$

C *et* C' *sont deux contours, dans les plans des* variables complexes x, y, *entourant, le premier les racines* a_1 *et* a_2 *de* $P=0$, *le second les racines* a_2 *et* a_3.

Fig. 4.



Posons $z=\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}$; nous avons à considérer

$$\int_C\int_{C'}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x)}{(y-x)z}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right]\right\}dx\,dy.$$

Nous avons deux intégrales J_1 et J_2. Calculons J_1.

Soient p et q les points où les contours se couperaient si les plans x, y étaient superposés. y suivra le contour C' et x le contour $x_1x_3+x_4x_3$, laissant de côté deux petits éléments autour de p et q. Laissons d'abord y *fixe* en un point quelconque de C'.

Quand x effectue le tour de C, la détermination de $\sqrt{P(x)}$ n'est pas changée.

Intégrons donc en x; il vient

$$\varphi=\left|\begin{matrix}f(x_3)-f(x_1)\\+f(x_2)-f(x_4)\end{matrix}\right|,\qquad f(x_p)=\frac{\sqrt{P(x_p)}}{(y-x_p)\sqrt{P(y)}}.$$

Il reste à effectuer

$$\int_{C'}\varphi(y)\,dy.$$

C′ sera décomposé en $mqnrm$ et $mrnpm$ par un petit contour auxiliaire. Puis la première partie sera décomposée elle-même autour de q.

Écrivons φ sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$:

$$\varphi_1 = f(x_2) - f(x_1), \qquad \varphi_2 = f(x_3) - f(x_4).$$

On a

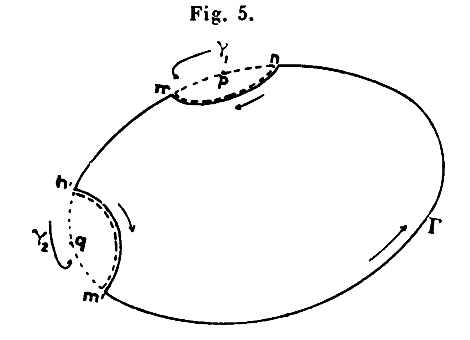
$$|\varphi_1| < \varepsilon, \qquad |\varphi_2| < \varepsilon.$$

ε tendra vers *zéro* en même temps que les arcs $x_1 x_2$ et $x_3 x_4$.

Nous appelons Γ le grand contour, γ_1 et γ_2 les petits contours dessinés en pointillé.

Pour le contour Γ, les intégrales de φ_1 et φ_2 sont, en

Fig. 5.



module, moindres que η, qui s'évanouit avec ε.

Pour γ_1 et γ_2, *un seul terme* donne un résultat.

Le contour γ_1 donnera

$$\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{P(x_2)}}{\sqrt{P(y)}} \frac{dy}{y - x_2} = 2\pi i$$

(puisqu'on peut faire évanouir le contour γ_1).

Le contour γ_2 donnera, $P(y)$ ayant changé de détermination après le contour du point a_2,

$$\int_{\gamma_2} \frac{-\sqrt{P(x_4)}}{-\sqrt{P(y)}} \frac{dy}{y - x_4} = 2\pi i.$$

Donc

$$J_1 = 4\pi i.$$

Avec ce contour,

$$J_2 = 0.$$

C'est la démonstration simple, donnée par M. E. Picard, d'un théorème de Weierstrass, relatif aux systèmes de périodes des transcendantes hyperelliptiques.

Pour le cas elliptique, le théorème est le suivant :

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad K_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} id,$$

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 s^2\, ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}, \qquad J_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} id.$$

On a

$$KJ_1 - JK_1 = \frac{\pi}{2}$$

(Weierstrass, *Werke*, t. I; Picard, *Fonctions algébriques de deux variables*, t. II).

SOMMES DE GAUSS.

9. *Soit*

$$S_n = \sum_1^n e^{\frac{2\pi i}{n}k^2}.$$

Déduire ces sommes de l'intégration, suivant un contour fermé, de la fonction

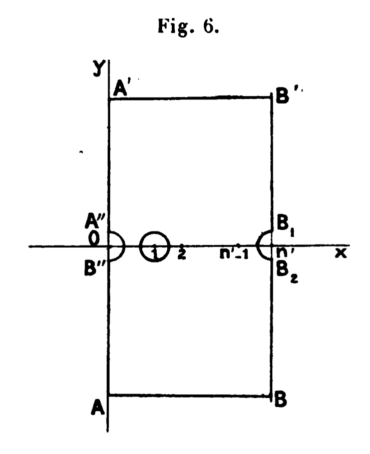
$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}z^2}}{e^{2\pi i z} - 1}.$$

Supposons $n = 2n'$ et prenons pour contour un rectangle de côtés n' et $2p$, p étant un entier :

$$OA = OA' = p, \qquad AB = A'B' = n'.$$

Les pôles sont o, 1, 2, ..., n'. Nous les isolons par de petits cercles ou demi-cercles.

Fig. 6.



Études l'intégrale de contour.

I. Sur AB.

Soit N le numérateur $z = t = pi$,

$$|N| = e^{\frac{4\pi p}{n} t}.$$

Le dénominateur

$$D = e^{2\pi p}\left(1 - \frac{1}{e^{2\pi p} e^{2\pi i t}}\right) e^{2\pi i t}.$$

Donc

$$|D| \sim e^{2\pi p} \qquad (\text{pour } p = \infty),$$

$$\left|\int_A^B\right| < \frac{1}{e^{2\pi p}} \left|\int_0^{n'} e^{\frac{2\pi p}{n'} t}\, dt\right|.$$

Ceci tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

II. Sur A'B'.

On voit de suite que l'intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

III. Sur A'A'' et B''A.

Nous obtenons de suite

$$i\int_{+p}^{+\varepsilon} e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}\left[\frac{1}{e^{-2\pi t}-1}+\frac{1}{e^{2\pi t}-1}\right]dt.$$

Le crochet se réduit à -1. D'où

$$i\int_{+\varepsilon}^{+p} e^{-\frac{2\pi i}{n}t^2}\,dt.$$

Ceci est une expression connue, α, lorsque $\varepsilon = 0$, $p = \infty$.

IV. Sur BB_2 et B_1B'.

$$i\int_{+\varepsilon}^{+p} e^{\pi i n'} e^{-\frac{\pi i}{n'}t^2}\left[\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t}-1}+\frac{e^{+2\pi t}}{e^{2\pi t}-1}\right]dt.$$

Le crochet se réduit à 1. D'où, pour $\varepsilon = 0$, $p = \infty$, le terme

$$\beta = e^{\pi i n'}\alpha.$$

V. Les résidus sont (racines *simples* du dénominateur) :

$$\frac{1}{2}\theta_0,\quad \frac{1}{2}\theta_{n'},\quad \theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots,\quad \theta_{n'-1},$$

$$\theta_k = \frac{1}{2\pi i}e^{\frac{2\pi i}{n}k^2}.$$

On n'a qu'à exprimer α par les intégrales de Fresnel, pour avoir $\sum\theta_k$.

(Même méthode pour $n = 2n'+1$.)

Remarquons que $\theta_k = \theta_{n-k}$, puisque $e^{2\pi i h} = 1$; nous avons alors la somme de Gauss.

10. *Calculer*

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Prendre pour contour l'axe des x avec un demi-cercle de

rayon très grand, ou un rectangle, et intégrer la fonction

$$\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iz}}{z}.$$

Calculer

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}, \qquad 0<a<1.$$

Prendre l'axe des x et un demi-cercle de rayon très grand, d'où

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad \left(\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x}\right)=\pi\cot a\pi.$$

La parenthèse indique qu'on prend *la valeur principale* de Cauchy.

Calculer

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}\,e^{-x}\sin x\,dx.$$

Soit

$$J_h=\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x\,dx}{(x+1)^h};$$

on a à calculer $J_1+J_2+J_3$ (*par parties*).

Calculer

$$H=\int_{-a}^{+a}\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx.$$

Faire $x=\sin\varphi$, puis $\cos\varphi=u$, $z^2=1+\frac{a^2-1}{u^2}$, et l'on est ramené à

$$\int\frac{(a^2-x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$H=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{a^2-1}\right).$$

CHAPITRE II.

PROBLÈMES DIVERS.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RÉSIDUS. NOMBRES DE BERNOULLI. DÉVELOPPEMENT DE $\cot x$. PROBLÈMES.

1. Rappelons quelques résultats [1] :

Soit une fonction $f(z)$ méromophe.

Représentons par $\mathcal{E}_C f(z)$ la somme des résidus dans l'aire C.

Prenons pour le contour de C successivement des circonférences C_n, de rayon R_n, évitant les pôles, R_n croissant indéfiniment avec n, on a

$$\mathcal{E}_{C_n} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z_n f(z_n)\, d\varphi,$$

$$z_n = R_n e^{i\varphi}.$$

D'où ces théorèmes :

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} z_n f(z_n) = A \tag{1}$$

uniformément pour $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, il en résulte

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{E}_{C_n} f(z) = A. \tag{2}$$

---

[1] *Voir* le Volume, si précis et élégant, de M. E. Lindelöf (collection E. Borel).

Cette limite est le *résidu intégral* de Cauchy

$$\mathcal{E} f(z).$$

Le théorème subsiste si la condition (1) est vérifiée sauf seulement pour p valeurs de φ et si, en ces points, $z_n f(z_n)$ conserve un *module fini*.

De même, si l'on a

$$(1') \qquad \lim_{n=\infty} f(z_n) = A,$$

la condition étant réalisée *uniformément*, sauf en p points où $f(z_n)$ conserve un *module fini*, il en résulte

$$(2') \qquad \mathcal{E} \frac{f(z)}{z-x} = A.$$

Si l'on a

$$(1'') \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f(z_n)}{z_n} = 0$$

et si la fonction f est *impaire*, on aura

$$(2'') \qquad \mathcal{E} \frac{f(z)}{z-x} = 0.$$

(Il suffit d'écrire

$$\int_0^{2\pi} \frac{z_n f(z_n)\, d\varphi}{z_n - x} = \int_0^{2\pi} \frac{z_n(z_n + x) f(z_n)\, d\varphi}{z_n^2 - x^2}.\Bigg)$$

Appliquons ceci.

2. *Calcul des nombres de Bernoulli.* — Ce sont les coefficients du développement de $\frac{1}{e^z - 1}$,

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

Formons

$$f(z) = \frac{1}{z^{2k}} \frac{1}{e^z - 1}.$$

Les pôles sont $\pm 2n\pi i$ (n entier) et zéro. Nous prendrons

$$R_n = (2n - 1)\pi.$$

Ainsi C_n étant toujours à une distance finie d'un pôle quelconque, $z_n f(z_n)$ tend uniformément vers zéro sur tout le cercle C_n. D'où $A = 0$,

$$0 = (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \frac{1}{n^{2k}},$$

$$B_k = 2 \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

3. *Développement de* $\pi \cot \pi z$. — $\sin \pi z$ a les racines simples $\pm n$ qui seront pôles simples de $\cot \pi z$.

D'après les développements tayloriens, chaque *résidu* est $+1$.

Prenons $R_n = n - \frac{1}{2}$, alors la circonférence C_n passe à distance finie de tout pôle, d'où, M étant un nombre fixe,

$$|f(z_n)| < M,$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(z_n)}{z_n} = 0,$$

uniformément.

D'ailleurs, la fonction est impaire, d'où

$$\int_C \frac{f(z)}{z - x} = 0,$$

$$0 = f(x) + \left[\frac{1}{0 - x} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{n - x} + \frac{1}{-n - x}\right)\right],$$

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + n} + \frac{1}{x - n}\right).$$

Ceci peut s'écrire, $\sum'$ signifiant qu'on associe constam-

ment $+k$ et $-k$ (pour la convergence),

$$\cot x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{x - k\pi},$$

$$\operatorname{tang} x = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sum{}' \frac{1}{x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi},$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2} + \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right) = \sum{}' \frac{(-1)^k}{x - k\pi}.$$

D'une façon plus précise, et conformément aux idées d'où proviennent les théorèmes généraux de Weierstrass et M. Mittag-Leffler, écrivons

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{x + k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right).$$

Intégrons

$$\mathcal{L}\frac{\sin x}{x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathcal{L}\left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) + \mathcal{L}\, e^{\frac{x}{k\pi}}\right],$$

$$\sin x = x\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)e^{\frac{x}{k\pi}} = x\prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

4. *Trouver les points singuliers possibles des intégrales des équations linéaires homogènes, par le calcul du Wronskien.* — Soit, par exemple, pour simplifier, une équation d'ordre 3

$$y''' + Py'' + Qy' + Ry = 0$$

et trois solutions u, v, w; elles ne sont indépendantes que si le wronskien est $\neq 0$,

$$W = \| u \quad u' \quad u'' \|.$$

Groupons dans le terme p toutes les singularités de P,

Q, R, écrivons donc

$$y''' + p(\alpha y'' + \beta y' + \gamma y) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \| u \quad u' \quad u''' \| \\ &= \| u \quad u' \quad -p(\alpha u'' + \beta u' + \gamma u) \| \\ &= -p\alpha \| u \quad u' \quad u'' \| = -\mathrm{PW}, \end{aligned}$$

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int \mathrm{P}\,dx}.$$

Si donc $W(x_0) \neq 0$, W ne peut s'annuler que pour les points singuliers de $p(x)$.

L'intégrale est donc régulière tant qu'on n'atteint pas un point singulier des coefficients.

5. *Soit*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre; à quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x, y)$ pour que les courbes représentées par l'intégrale générale

$$F(x, y) = C$$

forment une famille de courbes parallèles? (Sorbonne.)

La trajectoire orthogonale de la famille des courbes (1) a pour équation différentielle

$$1 + \frac{dy}{dx} f(x, y) = 0; \tag{2}$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

or, on a, en dérivant l'équation (2),

$$\frac{d^2y}{dx^2} f(x, y) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

d'où la condition

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et, en éliminant $\frac{dy}{dx}$,

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc $f(x, y)$ satisfera à l'équation aux dérivées partielles (3), dont l'intégrale est

$$(4)\qquad x + yf = \varphi(f).$$

Posons

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = p,$$

on aura

$$y = -\frac{x}{p} + \frac{\varphi(p)}{p}.$$

On n'a qu'à *dériver*, en x, d'où x en fonction de p.

6. *Étudier l'équation différentielle*

$$(1)\qquad y''' + \frac{A}{x^2}y' - \left(\frac{B}{x^3} + \frac{m}{2}\right)y = 0$$

par le changement de variable

$$(2)\qquad z = y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y$$

[A, B, a, b sont des constantes. Les dernières sont arbitraires [1].]

L'équation (1) donne

$$(3)\qquad z' - \frac{a}{x}z = \frac{b - a - a^2 - A}{x^2}y' + \left(\frac{B - 2b - ab}{x^3} + \frac{m}{2}\right)y.$$

---

[1] HALPHEN, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXVIII.

Nous poserons

$$(\text{I}) \qquad \begin{cases} b - a - a^2 = \text{A}, \\ b(a+2) \quad = \text{B}. \end{cases}$$

Dérivons (3), deux fois, il vient

$$(4) \qquad z''' + \frac{\text{A}_1}{x^2} z' - \left(\frac{\text{B}_1}{x^3} + \frac{m}{2}\right) z = 0,$$

ayant posé

$$(\text{II}) \qquad \begin{cases} \text{A}_1 = 2a + b - a^2 \quad = \text{A} + 3a, \\ \text{B}_1 = a(b + 2 - a) = \text{B} - 2\text{A} - 3a^2, \end{cases}$$

a étant racine de l'équation (5) provenant du système (I) par élimination de b

$$(5) \qquad a(a+1)(a+2) + \text{A}(a+2) - \text{B} = 0,$$

(4) et (1) sont identiques, sauf quant aux valeurs des coefficients, d'où les remarques suivantes :

1° $\text{A} = \text{B} = 0$. — L'équation (1) est à coefficients constants, donc intégrée.

Alors (5) admet la racine $a = -1$, qui donne

$$\text{A}_1 = \text{B}_1 = -3.$$

Donc (1) est intégrée pour

$$\text{A} = \text{B} = -3.$$

2° $\text{A} = \text{B} = -3$. — Alors (5) admet encore la racine $a = -1$, qui donne

$$\text{A}_1 = -6, \qquad \text{B}_1 = 0.$$

Donc (1) est intégrée pour

$$\text{A} = -6, \qquad \text{B} = 0.$$

3° $\text{A} = -6$, $\text{B} = 0$. — L'équation (5) admet la racine $a = -3$, qui donne

$$\text{A}_1 = \text{B}_1 = -15.$$

Donc (1) est intégrée pour

$$A = B = -15.$$

Nous apercevons une loi : (1) peut être intégrée ainsi pour

$$A = B = 1 - n^2,$$

n étant un entier, premier avec 3.

Démontrons-le :

Soit

$$A = B = 1 - n^2,$$

(5) admet la racine $a = -1$, qui donne

$$A_1 = -(n^2 + 2), \qquad B_1 = n^2 - 4.$$

Donnons *ces valeurs* à A et B, (5) admet la racine $a = -n$, qui donne

$$A_1 = -(n^2 + 3n + 2), \qquad B_1 = 0.$$

Donnons *ces valeurs* à A et B, d'où la racine

$$a = -(n+2),$$

qui donne

$$A_1 = B_1 = 1 - (n+3)^2.$$

7. *Trouver une intégrale de l'équation*

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{A}{(x-\alpha)^n (x-\beta)^n} y$$

qui soit de la forme

$$(x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu$$

(A est une constante).

Soit

$$z = (x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{z^{(n)}}{z} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^n (x-\beta)^n},$$

P est un polynome entier.

D'autre part, développons z suivant les puissances décroissantes de x

$$z = x^{\mu+\nu}\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^{\mu}\left(1 - \frac{\beta}{x}\right)^{\nu} = x^{\mu+\nu} + B_1 x^{\mu+\nu-1} + \dots$$

Si nous faisons $\mu + \nu = n - 1$, nous aurons

$$(3) \qquad \frac{z^{(n)}}{z} = (-1)^n n!\, B_n \frac{1}{x^{2n}} + \dots$$

Comparons (2) et (3), z est une solution si l'on a pour $P(x)$ une constante

$$(-1)^n n!\, B_n = A.$$

Il est inutile de calculer B_n par le développement précédent.

Décomposons (2) en fractions simples

$$(4) \qquad \frac{z^{(n)}}{z} = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{(x-\alpha)^n} + \dots$$
$$= \frac{A}{(\alpha-\beta)^n}\frac{1}{(x-\alpha)^n} + \dots$$

D'où la relation

$$(5) \qquad \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1) = \frac{A}{(\alpha-\beta)^n}.$$

C'est une équation, en μ, de degré n qui a n racines.

Nous avons donc n solutions et l'équation (1) est intégrée.

D'ailleurs (1) se transforme en une équation à coefficients constants si l'on prend pour fonction [1]

$$u = y(x-\beta)^{1-n}$$

et pour variable $t = \mathcal{L}\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$.

---

[1] HALPHEN, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXVIII.

8. *Une surface est engendrée par la conique*

$$y = \lambda(x + a), \qquad z^2 = 2ax + a^2 + (x + a)^2\varphi(\lambda).$$

Peut-on déterminer φ *de telle sorte que la conique soit ligne de courbure?*

Posons

$$x + a = \mu, \qquad y = \lambda\mu,$$
$$z = \sqrt{\mu^2\varphi(\lambda) + 2a\mu - a^2}.$$

La normale à cette surface est

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C},$$
$$A = \frac{D(y, z)}{D(\mu, \lambda)}, \quad \cdots\cdot$$

Écrivons cette normale

$$X = \frac{A}{C}Z - \frac{A}{C}z + x,$$
$$Y = \frac{B}{C}Z - \frac{B}{C}z + y.$$

Cette normale a une *enveloppe* si l'on a

$$d\frac{A}{C} \times d\left(-\frac{B}{C}z + y\right) = d\frac{B}{C} \times d\left(-\frac{A}{C}z + x\right).$$

Ceci doit être vérifié pour $d\lambda = 0$, d'où

$$2\mu\varphi'(\lambda^2 + 1 + \varphi) - 2a\lambda^2\varphi' + 4a\lambda(\varphi + 1) = 0.$$

Deux solutions :

1° $\varphi' = 0, \qquad \varphi = -1;$

2° $\lambda^2 + 1 + \varphi = 0.$

9. *Trouver les courbes planes telles que, en les transformant par* inversion, *il existe une relation donnée entre les courbures aux deux points qui se correspondent* (*fig.* 7)

$$OM = r, \qquad \frac{dr}{d\theta} = r';$$

Soit V l'angle du rayon vecteur avec la tangente; on a de suite, dans un triangle infiniment petit,

$$\tan V = \frac{r}{r'}; \tag{1}$$

Soit p la distance de O à la tangente

$$p = r \sin V = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\frac{dp}{dr} = rr' \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

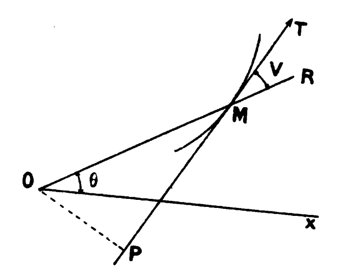
Soient ds l'arc de courbe et R le rayon de courbure,

$$ds = d\theta\sqrt{r^2 + r'^2},$$

d'où

$$R = \frac{ds}{d\theta + dV} = \frac{r\,dr}{dp}. \tag{2}$$

Nous emploierons cette formule (2).



Soient r_1, p_1, R_1 les éléments de C', courbe transformée de C, on a

$$rr_1 = 1, \tag{3}$$

et cette relation donne

$$p_1 = \frac{p}{r^2}, \tag{4}$$

$$R_1 = \frac{r_1\,dr_1}{dp_1} = \frac{-dr}{r\,dp - 2p\,dr}. \tag{5}$$

En établissant une relation entre R, R_1, nous avons une équation différentielle.

Soit, par exemple,

$$R_1 = aR,$$

nous avons

$$\frac{dp}{p} + \frac{2r\,dr}{r^2+b} = 0, \qquad b = \frac{1}{a},$$

$$C = p(r^2+b).$$

Remplaçons p par $\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}$, nous obtiendrons θ en fonction de R par une quadrature.

10. *Soit* Q *la projection d'un point* M *d'une surface* S *sur un plan fixe* P. *Soit* N *le point de rencontre de* P *avec la normale, en* M, *à* S.

Trouver les surfaces S *telles que la longueur* QN *soit constante.*

Lignes de courbure. (Sorbonne, 1899.)

Le plan P sera le plan xOy. N a pour coordonnées

$$X = x + pz, \qquad Y = y + qz,$$

d'où

$$(1) \qquad \overline{QN}^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 = (p^2+q^2)z^2 = K^2.$$

On a l'intégrale première

$$(2) \qquad p = aq.$$

d'où l'intégrale complète

$$(3) \qquad \frac{z^2}{2K} = \frac{ax+y}{\sqrt{1+a^2}} + b = x\cos u + y\sin u + b.$$

Nous posons

$$b = U(u)$$

et dérivons (3), par rapport à u,

$$-U' = x\sin u - y\cos u.$$

Exprimons x, y et z en fonction de deux paramètres u et v,

$$x = (U + v)\cos u - U'\sin u,$$
$$y = (U + v)\sin u + U'\cos u,$$
$$z = \sqrt{2Kv};$$

ce sont les équations de surfaces moulures, dont les lignes de courbure $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont toutes deux planes.

On peut reconnaître directement que les deux familles de lignes de courbure de la surface

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{z^2}{2K} + U &= x\cos u + y\sin u,\\ U' &= y\cos u + x\sin u \end{aligned}\right.$$

sont planes. D'abord, on a

$$(2)\qquad z\,dz = K(\cos u\,dx + \sin u\,dy),$$

d'où

$$p = \frac{K\cos u}{z}, \qquad q = \frac{K\sin u}{z};$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{K^2}{z^2} = \frac{z^2 + K^2}{z^2},$$

d'où

$$a = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{K\cos u}{\sqrt{z^2 + K^2}}, \qquad b = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{K\sin u}{\sqrt{z^2 + K^2}},$$

$$da = -\frac{K\sin u}{\sqrt{z^2 + K^2}}\,du - \frac{Kz\cos u}{(z^2 + K^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz,$$

$$db = \frac{K\cos u}{\sqrt{z^2 + K^2}}\,du - \frac{Kz\sin u}{(z^2 + K^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz;$$

l'équation différentielle des lignes de courbure

$$dx\,db - dy\,da = 0$$

devient

$$dx[(K^2 + z^2)\cos u\,du - z\sin u\,dz]$$
$$+ dy[(K^2 + z^2)\sin u\,du + z\cos u\,dz] = 0,$$

$$(K^2 + z^2)(\cos u\,dx + \sin u\,dy)\,du + z(\cos u\,dy - \sin u\,dx)\,dz = 0,$$

ou encore

$$\frac{K^2+z^2}{K} z\, du\, dz + z(U'' + x\cos u + y\sin u)\, du\, dz = 0,$$

$$\left(\frac{K^2+z^2}{K} + U + U'' + \frac{z^2}{2K}\right) du\, dz = 0,$$

d'où les deux solutions :

1° $dz = 0$, $z = \text{const.}$, famille de plans parallèles;

2° $du = 0$, $u = \text{const.}$, mais alors l'équation

$$U' = y\cos u - x\sin u$$

donne une seconde famille de plans perpendiculaires aux premiers. Les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente de la surface sont donc ses lignes de courbure.

Remarque. — En remplaçant $\frac{z^2}{2K}$ par une fonction quelconque de z, la même méthode donne les lignes de courbure d'une surface moulure quelconque.

11. *Étudier l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad px + qy = \frac{z}{2}.$$

Trouver les lignes asymptotiques des surfaces intégrales.

Surfaces telles que ces asymptotiques soient données par l'intersection des paraboloïdes

$$xz = cy,$$

pour l'un des systèmes. (Sorbonne, 1898.)

On obtient, de suite, la solution générale de (1)

$$(2) \qquad z^2 = x f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dans le plan $y = \alpha x$, on a une parabole.

Les asymptotiques sont données par

$$2\left(\frac{dv}{v}\right)^2 = \frac{f''(u)}{f(u)}\,du^2.$$

Pour que l'équation précédente soit vérifiée par la surface $z = Cu$, il faut avoir

$$\frac{2}{u^2} = \frac{f''(u)}{f(u)} \qquad \text{ou} \qquad u^2\frac{d^2 f}{du^2} - 2f = 0.$$

Posant

$$u = e^t, \qquad f(u) = e^{rt},$$

on a une équation linéaire homogène à coefficients constants, d'où

$$f(u) = Ae^{2t} + Be^{-t} = Au^2 + \frac{B}{u},$$

d'où l'équation générale des surfaces cherchées,

$$z^2 = x\left(A\frac{y^2}{x^2} + B\frac{x}{y}\right) = A\frac{y^2}{x} + B\frac{x^2}{y}.$$

Pour exprimer les coordonnées de cette première famille de lignes asymptotiques en fonction du paramètre u, on a

$$x = \frac{C^2u^3}{Au^3+B}, \qquad y = \frac{C^2u^4}{Au^3+B}, \qquad z = Cu.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\frac{dz}{z} = \pm\frac{du}{u};$$

le signe supérieur donne la première famille et $z = \frac{C}{u}$ la seconde; c'est encore une famille de paraboloïdes.

Cette seconde famille de lignes asymptotiques a pour équations

$$x = \frac{C^2}{Au^4+Bu}, \qquad y = \frac{C^2}{Au^3+Bu}, \qquad z = \frac{C}{u}.$$

Les deux familles sont unicursales.

En combinant ces équations, nous avons

$$\frac{dM}{M} = \frac{dN}{N},$$

$$(2) \qquad M = N\alpha$$

est une intégrale première.

Combinant (1) et (2), nous avons

$$\alpha^2 N^2 - 2aN + 2F = 0.$$

$$N = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F}}{\alpha^2}.$$

Prenons le signe $+$, calculons p, q et formons

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$\frac{\alpha^2\,dz}{a + \sqrt{a^2 - 2\alpha^2 F}} = \alpha \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} - \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Intégrons et représentons par $\Phi(z)$ le premier membre :

$$(3) \qquad \Phi(z) = \frac{\alpha}{2} \mathfrak{L}(x^2 + y^2) - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \beta.$$

Voici une intégrale complète.

Les asymptotiques sont données par

$$(4) \qquad dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

Prenons des valeurs proportionnelles à dp, dx, ..., (4) devient

$$(5) \qquad \alpha(MF' - 2F - a^2) - aF' = 0,$$

α est constant sur *une* caractéristique, mais varie de l'une à l'autre, de sorte que l'équation (5) exigera

$$F' = 0, \qquad F = -\frac{a^2}{2},$$

alors

$$\Phi(z) = \frac{\alpha^2 z}{a\left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2}\right)}.$$

Ceci n'a plus de sens si $a = 0$; nous avons alors une

autre équation

$$px + qy \pm \sqrt{-2\,F(z)} = 0.$$

Ici les caractéristiques se trouvent dans les plans $y = mx$.

Si l'on veut que les caractéristiques soient asymptotiques, il faut que la surface intégrale soit une développable, donc que l'on ait

$$\sqrt{-2\,F(z)} = z - K.$$

Nous avons alors les cônes de sommet

$$(0, 0, K)$$

(*Nouv. Ann. de Math.*, 1899.)

14. *On donne une hélice. En chaque point, dans le plan osculateur, on mène une droite* D *faisant avec l'axe un angle constant donné. Lignes asymptotiques de la surface, lieu de* D ? — Soit l'hélice

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta, \qquad z = l\theta.$$

Le plan osculateur a pour paramètres :

$$A = l\sin\theta, \qquad B = -l\cos\theta, \qquad C = 1.$$

Écrivons l'équation de D :

$$\frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b} = \frac{Z - z}{k}, \qquad a^2 + b^2 + k^2 = 1.$$

k est connu. Et l'on a, D étant dans le plan osculateur,

$$a = \frac{1}{l^2}\left[-kl\sin\theta \mp l\cos\theta\sqrt{l^2 - k^2(l^2+1)}\right] = m\sin\theta \pm n\cos\theta.$$

Prenons le signe $+$; on a ensuite

$$b = -m\cos\theta + n\sin\theta;$$

d'où les équations de S, lieu de D :

$$\begin{aligned} X &= \cos\theta + au, \\ Y &= \sin\theta + bu, \\ Z &= l\theta \quad + ku. \end{aligned}$$

Écrivons l'équation des asymptotiques :

$$\| \; d^2X \quad X'_\theta \quad X'_u \; \|.$$

Nous avons $d\theta$ en facteur, d'où la solution

$$\theta = \text{const.}$$

C'est la droite D. Il reste

$$0 = -2du[mk + l(1-k^2)] + d\theta\,[2un + u^2(1-k^2)],$$

$$m = -\frac{k}{l}, \qquad n = -\frac{1}{l}\sqrt{l^2 - k^2(l^2+1)}.$$

Il suffit de faire une quadrature.

En particulier, l'hélice est une asymptotique, car l'équation est satisfaite pour

$$u = 0 \qquad (du = 0).$$

15. *Soit l'équation*

$$(1) \qquad p^2 + q^2 = 2U(x, y).$$

1° Montrer *que les caractéristiques, sur la surface intégrale, coupent à angle droit les sections planes horizontales;*

2° Former *l'équation différentielle des multiplicités en x, y caractéristiques;*

3° Déterminer U *de façon que ces multiplicités soient des cercles horizontaux passant par l'origine des coordonnées;*

4° Pour ce cas, *former une intégrale complète de* (1).

Nous représentons $\frac{\partial U}{\partial x}$ par U_1, $\frac{\partial U}{\partial y}$ par U_2.

Le système d'équations des caractéristiques est

$$(1) \qquad \frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{2U} = \frac{dp}{U_1} = \frac{dq}{U_2};$$

soit un déplacement sur la surface

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z,$$

s'il est horizontal

$$p\,\delta x + q\,\delta y = 0$$

ou

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0.$$

C'est le premier point.

Cherchons l'équation des *sous-caractéristiques*.

(I) donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p\dfrac{dq}{dx} - q\dfrac{dp}{dx}}{p^2} = \frac{U_2 - \dfrac{q}{p}U_1}{p^2},$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2U}{p^2}.$$

Donc

(2) $$y'' = \frac{1+y'^2}{2U}(U_2 - U_1 y').$$

Telle est l'équation de la deuxième question.

Nous voulons avoir des cercles horizontaux

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Leur équation différentielle est

(3) $$y'' = \frac{1+y'^2}{x^2+y^2}\,2(xy' - y).$$

Écrivons donc

$$\frac{2U}{x^2+y^2} = \frac{U_1}{-2x} = \frac{U_2}{-2y} = \frac{U_1 + U_2 y'}{-2(x+yy')},$$

$$\frac{2(x+yy')}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y}y'}{U},$$

$$\sqrt{U} = \frac{C}{x^2+y^2}.$$

Passons aux coordonnées polaires avec cette valeur de U.

(1) devient

(1') $$p'^2 + \frac{1}{r^2}q'^2 = \frac{k^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = p', \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = q'.$$

On a l'intégrale première $q' =$ const., d'où une intégrale complète.

16. Théorie du facteur intégrant.

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

Si l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x} MX + \frac{\partial}{\partial y} MY = 0,$$

il en résulte

$$M(Y\,dx - X\,dy) \equiv du(x, y).$$

Ayant *un* multiplicateur M, *tous* les autres seront

$$M_1 = M\varphi(u) \qquad (\varphi \text{ arbitraire}).$$

La recherche de ce *multiplicateur d'Euler* équivaut à celle des *transformations infinitésimales* de Lie, lesquelles donnent des résultats d'une façon intuitive.

Ici le facteur M existe toujours, bien entendu, avec certaines restrictions de continuité...

$$\text{(II)} \qquad P(x, y, z)\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Les solutions sont des *courbes*. Il y a des solutions *surfaces* si l'on a

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \equiv 0$$

ou

$$PP_1 + QQ_1 + RR_1 = 0.$$

Alors la solution s'obtient en intégrant le système

$$\frac{dx}{P_1} = \frac{dy}{Q_1} = \frac{dz}{R_1}.$$

Ceci donne

$$y = F(x, \alpha, \beta),$$
$$z = G(x, \alpha, \beta).$$

J. Bertrand a montré qu'il suffit alors de différentier y

et z en x, α, β, de porter dans (II). Cela donne

$$A(\alpha, \beta)\, d\alpha + B(\alpha, \beta)\, d\beta = 0.$$

Intégrons, nous avons

$$f(\alpha, \beta) = C.$$

Remplaçons α et β en fonction de x, y, z, nous avons les solutions

$$f_1(x, y, z) = C.$$

(E. Picard, *Cours lith.*, Hermann, 1887).

17, *Soit la surface*

$$\begin{aligned} x &= a\,\varphi(u) + v \sin\theta \cos u, \\ y &= v \sin\theta \sin u, \\ z &= v \cos\theta. \end{aligned}$$

θ est une constante. Exprimer que la ligne de striction se trouve dans le plan yOz. Lignes asymptotiques. — Le plan tangent sera

$$0 = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ a\varphi' - v\sigma \sin u & v\sigma \cos u & 0 \\ \sigma \cos u & \sigma \sin u & \gamma \end{vmatrix}$$

en écrivant $\sigma = \sin\theta$, $\gamma = \cos\theta$.

Les paramètres de la normale sont donc :

$$\begin{aligned} A &= \gamma\sigma v \cos u, \\ B &= \gamma(\sigma v \sin u - a\varphi' \\ C &= \sigma a\varphi' \sin u - \sigma^2 v. \end{aligned}$$

Dans le plan yOz, on a

$$v = -\frac{a\varphi}{\sigma \cos u}.$$

Les paramètres sont :

$$\begin{aligned} A' &= -\gamma a\varphi, \\ B' &= -\gamma a\varphi' - \gamma a\varphi \operatorname{tang} u, \\ C' &= \sigma a\varphi' \sin u + \frac{\sigma a\varphi}{\cos u}. \end{aligned}$$

Au point infini, les paramètres sont :

$$A'' = \gamma\sigma \cos u,$$
$$B'' = \gamma\sigma \sin u,$$
$$C'' = -\sigma^2.$$

Nous exprimerons que ces directions sont à 90° ; alors le point central se trouvera dans yOz. D'où

$$\frac{\varphi}{\cos u} + \varphi'(u) \sin u = 0, \qquad \varphi = \cos u,$$

c'est-à-dire

$$\varphi' = -\sin u, \qquad \varphi'' = -\cos u.$$

Écrivons l'équation des asymptotiques :

$$0 = \begin{vmatrix} (a\varphi'' - v\sigma\cos u)\,du^2 - 2\sigma\sin u\,du\,dv & a\varphi' - v\sigma\sin u & \sigma\cos u \\ -v\sigma\sin u\,du^2 + 2\sigma\cos u\,du\,dv & v\sigma\cos u & \sigma\sin u \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}.$$

Nous avons la solution $du = 0$.

Ce sont les génératrices.

Puis une équation de Bernoulli.

18. *Former une solution de*

$$p^2 + q^2 = \frac{z^2}{a^2} - 1$$

contenant le cercle

$$z = a, \qquad x^2 + y^2 = b^2.$$

Écrivons l'équation des caractéristiques

$$\frac{dx}{a^2 p} = \frac{dy}{a^2 q} = \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{dp}{pz} = \frac{dq}{qz}.$$

Voici deux intégrales premières :

$$\sqrt{z^2 - a^2} = kp = k\lambda q.$$

Cependant elles ne sont pas distinctes, car l'on a

$$\frac{a^2}{k^2}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) = 1.$$

Mais nous avons alors

$$\frac{k}{a^2}(x - x^0) = \mathcal{L}(z + \sqrt{z^2 - a^2}),$$

$$\frac{k\lambda}{a^2}(y - y^0) = \mathcal{L}(z + \sqrt{z^2 - a^2}).$$

Voici les caractéristiques avec les trois paramètres x^0, y^0, λ.

Formons la combinaison

$$x^2 + y^2 = x^{02} + y^{02} + \frac{2a^2}{k}\left(x^0 + \frac{y^0}{\lambda}\right)\mathcal{L}F(z) + a^2[\mathcal{L}F(z)^2].$$

Nous voyons bien qu'on peut obtenir une surface de révolution ; il suffit de poser

$$x^0 + \frac{y^0}{\lambda} = 0,$$

$$x^{02} + y^{02} = R^2,$$

$$x^2 + y^2 = R^2 + a^2[\mathcal{L}(z + \sqrt{z^2 - a^2})]^2.$$

Pour $z = a$, on a

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

d'où R^2.

19. *Condition pour que les courbes, intégrales de*

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

forment une famille isotherme. En déduire un facteur intégrant. — Soient

$$(2) \qquad u(x, y) = \alpha$$

les intégrales de (1). u doit satisfaire à l'équation de Laplace.

Soit μ un multiplicateur de (1) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mu, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\mu f.$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ donnera la relation

$$(3) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-\mu f).$$

D'autre part, u est *harmonique*, d'où

$$(4) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-\mu f).$$

(3) et (4) nous donnent

$$(3') \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = -\mu \frac{f'_y + f f'_x}{1+f^2},$$

$$(4') \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{f'_x - f f'_y}{1+f^2},$$

d'où

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{f\,df}{1+f^2} + \frac{f'_x\,dy - f'_y\,dx}{1+f^2}.$$

Pour qu'on puisse déterminer μ, il faut que le second membre soit une différentielle totale exacte.

D'où, pour f, la condition

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{1+f^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{1+f^2}\right)$$

ou

$$\frac{(1+f^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - 2f\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}{(1+f^2)^2} = 0.$$

Posons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta_2 f \quad \text{(paramètre différentiel du second ordre)},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 = \Delta_1 f \quad \text{(paramètre différentiel du premier ordre)},$$

ou

$$\frac{2f}{1+f^2} = \frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f}.$$

Si cette condition est remplie, nous aurons

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial y}dx}{1+f^2} = dv(x, y),$$

$$d\log\mu = -\frac{1}{2}d\log(1+f^2) + dv(x, y),$$

$$\log\mu = \log c - \frac{1}{2}\log(1+f^2) + v(x, y),$$

d'où

$$\mu = \frac{ce^{v(x, y)}}{\sqrt{1+f^2}}.$$

20. *Soit une famille de courbes*

$$(\Gamma) \qquad x^2 + 2y^2 = \alpha z^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \beta z.$$

Démontrer qu'elles sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces.

Lignes de courbure de ces surfaces.

(Sorbonne, 1901.)

Cherchons le système d'équations différentielles des courbes (Γ), en différentiant et éliminant α, β :

$$x\,dx + 2y\,dy = \alpha z\,dz = \frac{x^2+2y^2}{z}dz,$$

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = \beta\,dz = \frac{x^2+y^2+z^2}{z}dz$$

ou bien

$$(\text{I}) \qquad \frac{dx}{2yz(y^2+z^2)} = \frac{dy}{-xz(x^2+3y^2+z^2)} = \frac{dz}{-2xyz^2}.$$

L'équation des surfaces trajectoires orthogonales est (s'il y a intégrabilité)

$$(1) \qquad \text{P}\,dx + \text{Q}\,dy + \text{R}\,dz = 0;$$

P, Q, R sont les dénominateurs de (I), et l'on a bien la condition voulue.

Intégrons par la méthode de J. Bertrand :

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{2yz} = -\frac{dz}{x^2+3y^2+z^2}, \qquad x = \alpha,$$

$$\frac{y\,dy}{y^2} = -\frac{2z\,dz}{\alpha^2+3y^2+z^2}.$$

Posant

$$y^2 = Y, \qquad z^2 = Z,$$

il vient

$$2\frac{dZ}{dY} + \frac{Z}{Y} + 3 + \frac{\alpha^2}{Y} = 0,$$

équation linéaire qui donne

$$z = e^{-\int\frac{dY}{2Y}}\left[\beta - \frac{1}{2}\int\left(3+\frac{\alpha^2}{Y}\right)e^{\int}dY\right]$$

ou

$$z^2 = \frac{1}{y}\left[\beta - \int(3y^2+\alpha^2)\,dy\right] = \frac{\beta}{y} - y^2 - \alpha^2.$$

Éliminant x et z, il vient

$$-2y\left(\frac{\beta}{y} - \alpha^2\right)d\alpha + \alpha\left(\frac{\beta}{y} + 2y^2\right)dy$$
$$+ \alpha y\left(-\frac{\beta}{y^2}dy + \frac{d\beta}{y} - 2y\,dy - 2\alpha\,d\alpha\right) = 0,$$
$$-2\beta\,d\alpha + \alpha\,d\beta = 0, \qquad \beta = 2K\alpha^2 = 2Kx^2,$$

d'où

$$x^2+y^2+z^2 = 2K\frac{x^2}{y}.$$

Cette surface est engendrée par le cercle mobile

$$x = \lambda y, \qquad x^2+y^2+z^2 = 2k\lambda x,$$

qui est ligne de courbure.

La deuxième famille de lignes de courbure sera donnée par des sphères tangentes en O au plan xOy

21. *Enveloppe des plans*

$$(1) \qquad 2ux + 2vy + (1-u^2-v^2)z = f(u) + \varphi(v).$$

Montrer que les lignes de courbure sont planes. Déterminer f et φ de façon que les plans des lignes de courbure d'un même système passent par une droite fixe. Lignes asymptotiques de la surface enveloppe.

(Sorbonne, 1906.)

Les coordonnées de l'enveloppe sont données par (1), (2), (3) :

$$(2) \qquad 2x - 2uz = f'(u),$$

$$(3) \qquad 2y - 2vz = \varphi'(v).$$

Posons

$$k = 1 + u^2 + v^2;$$

les cosinus de la normale à la surface sont

$$c = \frac{2u}{k}, \qquad c' = \frac{2v}{k}, \qquad c'' = \frac{2}{k} - 1.$$

Soit $u = \alpha$, constante; alors le plan (2) a sa normale faisant un angle constant avec la direction c, c', c''.

De même pour $v = \beta$ (*théorème de Joachimstal*).

Donc les lignes de courbure sont dans les deux familles de plans (2) et (3).

Pour que les plans (2) se coupent suivant une droite, écrivons que leurs traces sur xOz ont une enveloppe réduite à un point

$$-z = f''(u) = \text{const.}$$

Nous avons ainsi

$$f = au^2 + 2bu + c,$$

$$\varphi = \alpha v^2 + 2\beta v + \gamma.$$

Les lignes asymptotiques seront données par

$$(4) \qquad \mathrm{S}\, dc\, dx = 0.$$

Différentions (2) et (3) :

$$2\,dx - 2u\,dz - 2z\,du = f''(u)\,du = 2a\,du,$$
$$2\,dy - 2v\,dz - 2z\,dv = 2\alpha\,dv.$$

Il faut donc calculer z et dz :

$$z = \frac{f + \varphi - uf' - v\varphi'}{k} = \frac{m - au^2 - \alpha v^2}{k},$$
$$m = c + \gamma, \qquad k = 1 + u^2 + v^2;$$

$$dz = -\frac{2u\,du}{k^2}[a + m + (a - \alpha)v^2] - \frac{2v\,dv}{k^2}[\alpha + m + (\alpha - a)u^2],$$
$$dx = u\,dz + \frac{du}{k}[a + m + (a - \alpha)v^2],$$
$$dy = v\,dz + \frac{dv}{k}[\alpha + m + (\alpha - a)u^2];$$
$$dc'' = -\frac{4u\,du}{k^2} - \frac{4v\,dv}{k^2},$$
$$dc = \frac{2}{k^2}(1 - u^2 + v^2)\,du - \frac{4uv}{k^2}\,dv,$$
$$dc' = -\frac{4uv}{k^2}\,du + \frac{2}{k^2}(1 + u^2 - v^2)\,dv;$$

ou bien encore

$$dz = -2B\frac{u\,du}{k^2} - 2A\frac{v\,dv}{k^2},$$
$$dx = \frac{B}{k^2}(1 - u^2 + v^2)\,du - \frac{2uvA\,dv}{k^2},$$
$$dy = -\frac{2uvB}{k^2}\,du + \frac{A}{k^2}(1 + u^2 - v^2)\,dv.$$

Écrivons l'équation (4), en supprimant $\frac{1}{k^4}$:

$$M\,du^2 + N\,du\,dv + P\,dv^2 = 0.$$

On trouve

$$N = 0,$$
$$M = 2BK^2,$$
$$P = 2AK^2.$$

Or

$$A = \alpha + m + (\alpha - a)u^2 \qquad \text{ne dépend que de } u$$

et

$$B = a + m + (a - \alpha)v^2 \qquad \text{ne dépend que de } v.$$

Donc les lignes asymptotiques sont données par des quadratures faciles à effectuer.

22. *Étudier l'équation*

$$(1)\qquad K = \frac{py - qx}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Montrer que les caractéristiques sont lignes de courbure des surfaces intégrales. — Passons aux coordonnées polaires; (1) devient

$$(1')\qquad K^2 r^2(1+p'^2) - q'^2(1-K^2) = 0.$$

D'où l'intégrale première du système des caractéristiques $q' = \text{const.}$; d'où une intégrale complète.

Écrivons (1) sous la forme symétrique

$$(1'')\qquad (py-qx)^2 - K^2(x^2+y^2)(1+p^2+q^2) = 0;$$

posons

$$py - qx = U, \qquad 1+p^2+q^2 = V,$$
$$R = x^2+y^2.$$

Le système des caractéristiques est

$$(\text{I})\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{yU - K^2 pR} &= \frac{dy}{-xU - K^2 qR} = \frac{dz}{K^2 R} \\ &= \frac{dp}{qU + K^2 xV} = \frac{dq}{-pU + K^2 yV}. \end{aligned} \right.$$

Vérifions que ces courbes donnent lieu à l'identité (*voir* plus loin, p. 83)

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Ceci donne (1″)

$$U^2 - K^2 VR = 0.$$

Remarque. — $U = \text{const.}$ est une intégrale première de (I).

23. Équation adjointe. Transformation de Laplace. — I. Soient les systèmes

$$
(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} + ax + by + cz = 0,\\
&\frac{dy}{dt} + a_1x + b_1y + c_1z = 0,\\
&\frac{dz}{dt} + a_2x + b_2y + c_2z = 0;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{dX}{dt} + aX + a_1Y + a_2Z = 0,\\
&-\frac{dY}{dt} + bX + b_1Y + b_2Z = 0,\\
&-\frac{dZ}{dt} + cX + c_1Y + c_2Z = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Ils sont *adjoints* l'un de l'autre, et l'on a

$$d(Xx + Yy + Zz) = 0.$$

Soit donc la solution de (1)

$$(x_1, y_1, z_1),\quad (x_2, y_2, z_2),\quad (x_3, y_3, z_3).$$

On aura la solution de (2), c_1, c_2, c_3 étant des constantes, par

$$Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 = c_1,\qquad Xx_2 + \ldots = c_2,\qquad Xx_3 + \ldots = c_3.$$

D'autre part, soit l'équation différentielle

$$(1')\qquad x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_nx = 0.$$

Multiplions par y, intégrons; nous avons une partie Ω et en plus

$$(-1)^n\int[y^n - (p_1y)^{n-1} + (p_2y)^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_ny]\,x\,dt.$$

Annulons la partie entre crochets :

$$(2')\qquad y^n - (p_1y)^{n-1} + \ldots = 0.$$

Si l'on transforme (1') en un système (1) et (2') en un système (2), (1) et (2) sont les systèmes adjoints précédents.

Par exemple, soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ n solutions de (2'); la solution de (1') sera

$$x = e^{-\int p_1 dt} \left\| C_k \frac{d^{n-2}y_k}{dt^{n-2}} \frac{d^{n-3}y_k}{dt^{n-3}} \cdots \frac{dy_k}{dt} y_k \right\|.$$

Le facteur qui précède le déterminant est l'inverse du *wronskien* des Y_k.

II. Soit l'équation

$$(3) \qquad P_0 y^{(m)} + P_1 y^{(m-1)} + \ldots + P_m y = 0.$$

Les P sont *polynomes* en x de degré $\leqq p$. Laplace pose

$$y = \int_\alpha^\beta V(z)\, e^{zx}\, dz.$$

Un terme tel que $x^p y^{(m)}$ donne, par l'intégration par parties,

$$(V z^m x^{p-1} e^{zx})_\alpha^\beta - \ldots + \ldots + (-1)^p \int_\alpha^\beta e^{zx} \frac{d^p}{dz^p} V z^m\, dz.$$

Nous sommes ramenés, pour intégrer (3), à annuler certains termes aux points α et β et à annuler l'expression sous le signe $\int$, ce qui donne une équation (4) d'ordre p et non d'ordre m.

Par exemple, soit

$$(a_0 x + b_0) y^{(m)} + (a_1 x + b_1) y^{(m-1)} + \ldots + (a_m x + b_m) y = 0.$$

L'équation (4) sera

$$(4) \qquad \left(-a_0 \frac{d}{dz} V z^m + b_0 V z^m\right) + \ldots = 0,$$

de la forme

$$\frac{dV}{V} = R(z)\, dz;$$

R est une fonction rationnelle dont numérateur et dénominateur ont le degré m.

24. *Application : Intégrer l'équation* (Laguerre)

$$x(y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + \ldots + ky' + ly)$$
$$- n[my^{m-1} + (m-1)ay^{m-2} + \ldots + ky] = 0.$$

L'adjointe est

$$\frac{d^m}{dx^m}xu - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(ax - nm)u$$
$$+ \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}[bx - n(m-1)a]u + \ldots = 0,$$

ou encore

$$x(u^m - au^{m-1} + bu^{m-2} \pm \ldots \pm lu)$$
$$+ (n+1)[mu^{m-1} - (m-1)au^{m-2} \pm \ldots \pm ku] = 0.$$

Appliquons la méthode de Laplace, en remplaçant z par $-z$; (4) donnera

$$\frac{d}{dz}[-V(z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + \ldots + l)]$$
$$+ (n+1)V[mz^{m-1} + (m-1)az^{m-2} + \ldots + k] = 0,$$

d'où

$$V = \overline{Q(z)}^{\,n}, \qquad Q(z) = z^m + az^{m-1} + \ldots + l.$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les racines; nous les prendrons pour limite inférieure α. Pour β nous prenons $\pm\infty$, de sorte que e^{-zx} s'annule.

Voici donc les solutions de l'adjointe

$$u_k = \int_{z_k}^{\pm\infty} e^{-zx}\,\overline{Q(z)}^{\,n}\,dz.$$

L'équation donnée est intégrée.

25. Théorie du dernier multiplicateur (Jacobi) :

$$(1) \qquad \frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Le multiplicateur M est défini par

$$\frac{\partial}{\partial x}\text{MX} + \frac{\partial}{\partial y}\text{MY} + \frac{\partial}{\partial z}\text{MZ} = 0.$$

Soient $f = \alpha$, $\varphi = \beta$ deux intégrales premières de (1), $\mathfrak{F}$ le symbole d'une fonction arbitraire; tout autre multiplicateur est

$$M_1 = M\,\mathfrak{F}(f, \varphi).$$

Si l'on connaît M et φ, *le dernier multiplicateur,* qui achève l'intégration, est

$$\frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}.$$

Tirons z de $\varphi = \beta$; alors

$$\frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}(X\,dy - Y\,dx) = dF(x, y)$$

(E. Picard, *Cours lith.*, 1887).

26. *Application.*

I. *Soient deux polynomes du second degré* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *ayant mêmes termes homogènes du deuxième degré.*

Soit $F(x, y, z, u)$ *une fonction homogène du deuxième degré. Mettre les polynomes sous la forme*

$$F(x, y, a, b), \qquad F(x, y, \alpha, \beta)$$

et montrer que la relation

$$(2)\quad 2\sqrt{P(x, y)\,Q(\xi, \eta)} - \xi\frac{\partial P}{\partial x} - \eta\frac{\partial P}{\partial y} - \alpha\frac{\partial P}{\partial a} - \beta\frac{\partial P}{\partial b} = \text{const.}$$

vérifie le système

$$(1)\qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\sqrt{P(x, y)}}{\sqrt{Q(\xi, \eta)}}.$$

La lettre h ou H désignant un ensemble homogène de degré 2, on a

$$F(x, y, a, b) = h(x, y) + H(a, b) + (\lambda a + \mu b)x + (\lambda_1 a + \mu_1 b)y.$$

Soit, d'ailleurs,

$$P(x, y) = h(x, y) + mx + ny + p.$$

Nous résolvons facilement le système

$$\lambda a + \mu b = m, \qquad \lambda_1 a + \mu_1 b = n, \qquad H(a, b) = p,$$

avec les analogues en α, β, m_1, n_1, p_1, ces trois derniers étant les coefficients de Q.

Donc

$$P(x, y) = F(x, y, a, b),$$

$$Q(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, \alpha, \beta),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial a} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi\, \partial \alpha}, \qquad \ldots;$$

$\frac{\partial Q}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial Q}{\partial \eta}$ sont homogènes, de degré 1, donc satisfont à la relation

$$\varphi = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta},$$

d'où

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \xi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y} + \alpha \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial a} + \beta \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial b},$$

et $\frac{\partial Q}{\partial \eta}$ est analogue.

Dans ces conditions, la différentielle de (2), relativement à x, y, ξ, η, est

$$d\lambda = \left(\sqrt{Q}\, dx - \sqrt{P}\, d\xi\right)\left(\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial Q}{\partial \xi}\right)$$
$$+ \left(\sqrt{Q}\, dy - \sqrt{P}\, d\eta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial Q}{\partial \eta}\right).$$

Elle est nulle, d'après (1).

II. *Étude de l'équation*

$$y'' = \frac{F(y')}{\sqrt{P(x,y)}}, \tag{3}$$

F *étant une fonction quelconque.* (Laguerre.)

Associons (3) avec

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{F\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)}{\sqrt{Q(\xi,\eta)}}. \tag{3'}$$

Soit une intégrale de (3')

$$\eta = \theta(\xi), \qquad d\eta = \theta'(\xi)\,d\xi.$$

Les relations de (1) donnent ainsi

$$\frac{dx}{\dfrac{1}{\sqrt{Q}}} = \frac{dy}{\dfrac{\theta'}{\sqrt{Q}}} = \frac{d\xi}{\dfrac{1}{\sqrt{P}}}. \tag{I}$$

Éliminons ξ entre ces deux équations :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\theta''\sqrt{Q}}{\sqrt{P}} = \frac{F\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{P}}.$$

C'est (3).

Or, nous avons vu que la relation (2), avec $\eta = \theta(\xi)$, est une intégrale première du système (I).

La théorie de Jacobi s'applique aussitôt, car

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{Q(\xi,\eta)}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{Q(\xi,\eta)}} + \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{P(x,y)}} = 0.$$

Donc le système (I) a une deuxième intégrale

$$\mu = \text{const.} = \int \frac{1}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial\xi}}\,\frac{\theta'(\xi)\,dx - dy}{\sqrt{Q(\xi,\eta)}}; \tag{4}$$

λ est le premier membre de (2).

(4) est la solution de (3), puisqu'il y a *deux* constantes arbitraires λ, μ.

$\theta'(\xi)$ est une fonction connue de η, puisqu'on connaît $\eta = \theta(\xi)$ solution de (3').

Enfin, par (2), η s'exprime en λ, x, y.

Donc (3) s'intègre si l'on a *une solution particulière* de (3').

27. *Démontrer, par la théorie générale des fonctions, la relation*

$$(1)\qquad \frac{z}{(z-1)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\mathcal{L}z + 2n\pi i)^2}.$$

(Stieltjes.)

Si $\mathcal{L}z$ désigne *un* logarithme bien défini de z, tous les autres sont justement

$$\mathcal{L}z \pm 2n\pi i.$$

Donc la série représente une fonction *uniforme* $\left(\text{elle converge comme } \sum n^{-2}\right)$, soit $f(z)$.

$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ et $f(z)$ tend vers *zéro* si $|z|$ devient infiniment petit ou grand, le dénominateur de chaque terme croissant indéfiniment. Dans ces conditions, $f(z)$ ne peut devenir infini que si l'un des termes est infini.

Prenons $\mathcal{L}z = \mathcal{L}_0 z$, celui dont l'argument est *nul* sur l'axe réel, et écrivons

$$\mathcal{L}_n z = \mathcal{L}_0 z + 2n\pi i,$$

$$f(z) = \frac{1}{(\mathcal{L}_0 z)^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\mathcal{L}_n z)^2};$$

on a le pôle $z = +1$. D'ailleurs

$$(2)\qquad f(1+h) = \frac{1}{h^2}\left(1 + h + \frac{h^2}{12} + \ldots\right) + \ldots.$$

Donc ce pôle est double. La fonction a-t-elle d'autres *zéros* que $z = 0, \infty$?

Calculons

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f}\,dz = 2\pi i(\pi - \rho);$$

Γ est un contour renfermant π pôles et ρ racines.

A cause de la convergence uniforme de la série et de la série dérivée terme à terme, on voit de suite que, si Γ est un cercle de rayon infini, l'intégrale est nulle, d'où

$$\pi = \rho.$$

Comme il y a un pôle double, nous n'avons que les deux racines $0, \infty$.

Donc

$$f(z) = \frac{Az}{(z-1)^2}$$

et la relation (2) donne

$$A = 1.$$

Remarque. — Faisons $z = e^u$, puis intégrons :

$$\frac{e^u}{(e^u - 1)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u + 2n\pi i)^2},$$

$$\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{e^a - 1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{u + 2n\pi i} - \frac{1}{a + 2n\pi i}\right).$$

Faisons $a = 0$; deux infinis se détruisent :

$$\frac{1}{e^u - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{u} + \sum \left(\frac{1}{u + 2n\pi i} - \frac{1}{2n\pi i}\right),$$
$$n = \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \ldots.$$

28. *Soit une série convergente* $(0 < x < 1)$:

(1) $$f(x) = \sum_1^\infty \frac{C_n}{n} \sin 2n\pi x.$$

Démontrer que la dérivée est, quand la série (2) *converge uniformément,*

$$(2)\qquad f'(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \sum_{\infty}^{0} (C_n - C_{n+1}) \sin(2n+1)\pi x$$

(M. Lerch, *Ann. École norm.*, 1895).

Posons $f'(x) = g(x)$ et intégrons $g(x)$ après avoir employé la transformation d'Abel :

$$\sum_{0}^{n} a_p b_p \equiv \sum_{0}^{n-1} A_p (b_p - b_{p+1}) + a_n b_n,$$

$$A_p = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p, \qquad a_p = C_p - C_{p+1},$$

d'où

$$A_p = -C_{p+1}, \qquad \text{car} \qquad C_0 \equiv 0,$$

$$b_p = \sin(2p+1)\pi x,$$

d'où

$$b_p - b_{p+1} = -2\cos(2p+2)\pi x \sin \pi x.$$

Si donc $g(x)$ *converge uniformément,* nous pouvons intégrer terme à terme, ou encore intégrer de x_0 à x_1 :

$$\sum_{0}^{n-1} 2\pi C_{p+1} \cos(2p+2)\pi x + \pi C_{n+1} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}.$$

La première somme donne bien, pour $n = \infty$,

$$f(x_1) - f(x_0).$$

Il suffit de voir que le reste tend vers zéro :

$$R_n = \pi C_{n+1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} dx$$

$$= \pi C_{n+1} \left\{ \left[\frac{-\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)\pi \sin \pi x} \right]_{x_0}^{x_1} \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)\pi} \frac{-\pi \cos \pi x}{\sin^2 \pi x} dx \right\}.$$

Nous avons en facteur un terme de la forme

$$\frac{C_{n+1}}{n+1},$$

lequel tend vers zéro puisque la série converge.

Par le même raisonnement, on a

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos 2n\pi x,$$

$$\varphi'(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \sum_{0}^{\infty} (C_n - C_{n+1}) \cos(2n+1)\pi x.$$

Application. — Calculer

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} \\ G(x) &= \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n} \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < 1.$$

D'abord F et G convergent (*voir*, par exemple, LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*);

$$F'(x) = -1,$$

d'où

$$F(x) = -x + \alpha;$$

pour $x = \frac{1}{2}$, chaque terme est nul, d'où

$$\alpha = \frac{1}{2};$$

$$G'(x) = -\pi \cot \pi x,$$

d'où

$$G(x) = -\mathcal{L} \sin \pi x + \beta;$$

faisons $x = \frac{1}{2}$, la série donne

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots = -\mathcal{L}2,$$

d'où

$$\beta = -\mathcal{L}2.$$

29. *Soit une fonction développée en série de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos kx + b_k \sin kx;$$

soit

$$S_n = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n a_k^2 + b_k^2.$$

Démontrer les relations

$$(1) \quad S_n = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) f(y) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} dx\, dy,$$

$$(2) \quad \lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx$$

(A. Hurwitz, *Ann. École norm.*, 1902).

Partons de l'identité élémentaire

$$\frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} = 2\left[\frac{1}{2} + \cos(x-y) + \cos 2(x-y) + \ldots + \cos n(x-y)\right].$$

Écrivons

$$\cos k(x-y) = \cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky;$$

les variables se séparent et (1) est prouvé.

Fig. 8.

Transformons l'intégrale (1).

D'abord prenons deux fois l'intégrale relative à OAB;

puis, dans OAB, remplaçons le rectangle élémentaire $dx\,dy$ par le parallélogramme de hauteur dy et de base $2d\xi$ ($2\xi =$ OM définit la droite MN parallèle à OB),

$$S_n = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi}\,d\xi \int_0^{2\pi-2\xi} f(y)f(y+2\xi)\,dy\,;$$

soit

$$F(x) = \int_0^{2\pi-x} f(y)f(y+x)\,dy.$$

D'après la théorie générale, on aura

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\xi}{\sin\xi} F(2\xi)\,d\xi = \frac{\pi}{2}[F(+0)+F(2\pi-0)],$$

$$F(+0)+F(2\pi-0) = \int_0^{2\pi} f(y)f(y)\,dy.$$

D'où la relation cherchée, si F est *continu*, et ce qui a lieu lorsque f est *bornée* et *intégrable* [1].

---

[1] Pour les questions fondamentales de l'*Analyse*, voir les Livres classiques de MM. C Jordan, Picard, Goursat, Humbert, Dini, Osgood, de la Vallée-Poussin, Appell et Goursat;

Pour la *Géométrie* : MM. Darboux, Bianchi, Raffy, Vessiot;

Pour les *Exercices* : MM. Frenet, Villié, Forsyth, et surtout Tisserand-Painlevé.

CHAPITRE III.

TRANSCENDANTES CLASSIQUES.

1. — POLYNOMES X_n DE LEGENDRE

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1+\sum \alpha^n X_n(x).$$

Démontrer, par les résidus, la formule de Rodrigues (Stieltjes),

$$X_n = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

L'on écrira aussi bien

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}x+1}} = \sum \frac{X_n}{\alpha^{n+1}}.$$

Posons $\alpha = z$, on aura

$$\frac{z^n}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = z^{n-1}+X_1 z^{n-2}+\ldots+\frac{X_n}{z}+\ldots.$$

Intégrant suivant un cercle de rayon très grand, enveloppant les points critiques, l'on a

$$\int_\Gamma \frac{z^n\,dz}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = 2\pi i X_n;$$

calculons l'intégrale en posant

$$1-2zx+z^2 = (u-z)^2.$$

Pour

$$|z| = R,$$

on a

$$|u - x| = 2R + \varepsilon,$$

ε tendant vers *zéro* avec $\frac{1}{R}$.

Nous pouvons donc faire décrire à u un cercle Γ' de centre x et de rayon $2R$:

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n (u - x)^{n+1}} du.$$

Or, ceci est bien

$$\frac{2\pi i}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

2. — FONCTIONS DE BESSEL

$$J_n(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p}{\lfloor p \, \lfloor n+p} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}.$$

Démontrer les relations

$$J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n, \qquad J_{n-1} - J_{n+1} = 2 \frac{dJ_n}{dx}.$$

Équation différentielle de J_n. *Racines de* J_n :

$$J_{n-1} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}}{\lfloor n-1} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2p}}{\lfloor p \, \lfloor n-1+p}.$$

Dans J_{n+1}, faisons $p = q - 1$:

$$J_{n+1} = \sum_1^{\infty} \frac{-(-1)^q \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2q}}{\lfloor q-1 \, \lfloor n+q}.$$

Remplaçons l'indice q par p et ajoutons :

$$J_{n-1}+J_{n+1}=\frac{n}{\lfloor n}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+n\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^p\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2p}}{\lfloor p\lfloor n+p}=n\frac{2}{x}J_n.$$

Faisons la différence :

$$J_{n-1}-J_{n+1}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^p(n+2p)}{\lfloor p\lfloor n+p}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2p}.$$

C'est bien

$$2\frac{dJ_n}{dx}.$$

Écrivons alors

$$J_{n-2}+J_n=(n-1)\frac{2}{x}J_{n-1},$$
$$J_{n-2}-J_n=2\frac{dJ_{n-1}}{dx}.$$

Nous avons, sans difficultés, l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d^2J_n}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J_n=0.$$

Remarques. — 1° La formule vaut encore pour $n=0$, car les précédentes valent en posant $J_{-1}=-J_1$.

2° L'équation (1) s'écrit aussi bien

$$(2)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{x}J_n+\left(1-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)\sqrt{x}J_n=0.$$

Démontrer la relation

$$\beta J_n(\alpha)J_{n+1}(\beta)-\alpha J_n(\beta)J_{n+1}(\alpha)$$
$$=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^1 x J_n(\alpha x)J_n(\beta x)\,dx.$$

Nous avons

$$J'_n(\alpha x)=\frac{n}{x}J_n(\alpha x)-\alpha J_{n+1}(\alpha x),$$

$$J'_n(\beta x)=\frac{n}{x}J_n(\beta x)-\beta J_{n+1}(\beta x)$$

(l'accent désignant la dérivée en x, non en αx).

Écrivons, d'ailleurs, l'équation (2) sous ces formes :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + fu = 0, \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} + gv = 0,$$

$$u = \sqrt{x}\,J_n(\alpha x), \qquad f = \alpha^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2},$$

$$v = \sqrt{x}\,J_n(\beta x), \qquad g = \beta^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}.$$

On a de suite

$$[vu' - uv']_0^1 = \int_0^1 (g - f)\,uv\,dx,$$

qui donne la relation cherchée.

Démontrer que l'équation $J_n(x) = 0$ *n'a que des racines réelles et que* J_n *et* J_{n+1} *n'ont pas de racine commune.* — Si J_n admettait la racine $\alpha = a + bi$, il admettrait la racine $\beta = a - bi$.

Posons $J_n(\alpha x) = A + Bi$, $J_n(\beta x) = A - Bi$. Le théorème qui précède donne

$$\int_0^1 x(A^2 + B^2)\,dx = 0,$$

ce qui n'est pas possible.

La deuxième partie se démontre de même; on aurait

$$\int_0^1 x[J_n(\alpha x)]^2\,dx = 0.$$

L'équation $J_n(x) = 0$ *a une infinité de racines dont l'intervalle tend vers* π.

Rappelons un théorème de Sturm ([1]).

On a

$$y'' + y\,\varphi(x) = 0, \qquad z'' + z\,\psi(x) = 0, \qquad \varphi(x) \leqq \psi(x).$$

([1]) *Journ. de Liouville,* t. I. *Voir* les belles applications de M. E. Picard, *Traité,* t. III.

Soient x_0, x_1 deux racines consécutives d'une intégrale y. *Une intégrale z quelconque a au moins une racine* entre x_0 et x_1.

Ceci résulte aussitôt de

$$[zy' - yz']_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} yz[\psi(x) - \varphi(x)]\, dx.$$

Soit, de plus,

$$\varphi(x) > a \qquad \text{pour} \qquad x > 0 \qquad (a > 0).$$

Faisons $\psi_1 \equiv a$, d'où, C_1 et C_2 étant arbitraires,

$$z = C_1 \cos\sqrt{a}\,x + C_2 \sin\sqrt{a}\,x,$$

l'intégrale $z = 0$ ayant une infinité de racines positives; il en est de même pour y.

Eu égard à l'équation (2), la première proposition est prouvée.

Pour $x > L$, on a

$$1 + \eta > 1 + \frac{1 - 4n^2}{x^2} > 1 - \varepsilon.$$

ε et η tendent vers zéro avec $\frac{1}{L}$.

Écrivons les équations

$$y'' + y(1 + \varepsilon) = 0, \qquad z'' + z(1 + \eta) = 0.$$

La première admet la solution

$$y = \sin\sqrt{1 - \varepsilon}(x - a)$$

qui a les racines

$$x - a = 0, \qquad \sqrt{1 - \varepsilon}(x - a) = k\pi.$$

Pour la deuxième, la solution

$$z = \sin\sqrt{1 + \eta}(x - a)$$

a les zéros

$$x - a = 0, \qquad \sqrt{1 + \eta}(x - a) = k\pi.$$

Donc la fonction $u = \sqrt{x}\, J_n(x)$, qui satisfait à (2), a une racine entre a et $a + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$. Soit b cette racine, a étant déjà une racine de u.

D'autre part, $a + \frac{\pi}{\sqrt{1+\eta}}$ sera entre a et b, d'où

$$\lim(b - a) = \pi$$

lorsque x devient infini.

(*Cours de M. Picard,* en 1900.)

3. — FONCTIONS BÊTA ET GAMMA.

Par définition,

$$\Gamma(a) \quad = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx \qquad (a > 0),$$

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

Intégrons par parties :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \qquad \Gamma(n+1) = \underline{|n} \qquad (n \text{ entier}).$$

Faisons $x = \frac{y}{1+y}$:

$$B(a, b) = \int_0^1 + \int_1^\infty \frac{y^{a-1}\, dy}{(1+y)^{a+b}} = \int_0^1 \frac{y^{a-1} + y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy.$$

Transformons $\frac{1}{\Gamma(a)}$ en *produit.*

On écrit

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\mathcal{L}\frac{1}{z}\right)^{a-1} dz,$$

ce qui donne

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty} n^{a-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz.$$

En effet, si l'on pose

$$1 - z^{\frac{1}{n}} = \zeta,$$

on a

$$n\zeta = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{z}\right).$$

ε tend vers *zéro* avec ζ, c'est-à-dire avec $\frac{1}{n}$.

D'ailleurs,

$$\int_0^1 \mathcal{L}\left(\frac{1}{z}\right)^{a-1} dz = \int_0^\xi + \int_\xi^1.$$

ξ étant arbitraire, prenons, par exemple, $\xi = e^{-n}$; alors $\int_0^\xi n^{a-1}\zeta^{a-1}\,dz$ tend vers *zéro* avec $\frac{1}{n}$ et nous avons à calculer

$$\lim_{\xi=0} \int_\xi^1,$$

d'où la formule demandée.

Prenons donc *n entier* et posons $z^{\frac{1}{n}} = y$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}\,dy \\
&= \frac{n-1}{a}\int_0^1 y^{n-2}(1-y)^a\,dy \\
&= \ldots = \frac{n-1}{a}\,\frac{n-2}{a+1}\cdots\frac{1}{a+n-2}\int_0^1 (1-y)^{a+n-2}\,dy.
\end{aligned}$$

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty}\left[n^a\,\frac{n-1}{a}\,\frac{n-2}{a+1}\cdots\frac{1}{a+n-2}\,\frac{1}{a+n-1}\right].$$

La quantité entre crochets s'écrit, en prenant l'inverse et en posant $a = z$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^z}\,z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n-1}\right) \\
&\quad = e^{-z\mathcal{L}n}\,z\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-\frac{z}{1}}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\cdots e^{\frac{z}{1}+\frac{z}{2}+\cdots}.
\end{aligned}$$

Les exponentielles sont introduites, conformément aux idées de Weierstrass, pour obtenir un produit infini convergent.

Rappelons que la constante d'Euler est

$$C = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \mathcal{L}\, n\right),$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{h}\right) e^{-\frac{z}{h}}.$$

Les valeurs o, -1, -2, ..., $-n$, ... sont les *pôles* de la fonction gamma qui est ainsi étendue à tout le plan de la variable complexe. Faisons le produit :

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\,\frac{1}{\Gamma(1-z)}$$
$$= \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n} z\left(1 + \frac{z}{1}\right)\left(1 - \frac{z}{1}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(1 - \frac{z}{n}\right) n\right] = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Cela résulte de ce qu'on a

$$1 + \frac{1-z}{k} = \frac{k+1}{k}\left(1 - \frac{z}{k+1}\right),$$

d'où l'expression

$$z \prod \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

C'est la formule fondamentale

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

On a la relation capitale

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\,B(a, b).$$

On peut l'établir (Stieltjes) en partant de

$$f(x, a) = \int_0^x u^{a-1} e^{-u}\, du$$

et en écrivant

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x, b) = x^{b-1} e^{-x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f[x(1+z), a+b] = [x(1+z)]^{a+b-1}(1+z)\, e^{-x(1+z)},$$

puis l'on forme

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, a) f(x, b)]$$

et l'on intègre dans l'intervalle o — x en remarquant que, si l'on écrit $u = zx$, on a

$$f(x, a) = \int_0^1 x^a z^{a-1} e^{-xz}\, dz,$$

d'où

$$f[x(1+\theta), a+b]\, \mathrm{B}(a, b) = f(x, a) f(x, b) \qquad (0 < \theta < 1).$$

On fait alors $x = \infty$.

La démonstration classique de Jacobi consiste à partir de

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-tx}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{t^a},$$

$$\int_0^\infty x^{a+b-1} e^{-(1+y)x}\, dx = \frac{\Gamma(a+b)}{(1+y)^{a+b}}.$$

On multiplie par $y^{b-1}\, dy$ et l'on intègre dans l'intervalle o — ∞.

Soit la série hypergéométrique de Gauss

$$\mathrm{F}(a, b, c, x) = 1 + \frac{a.b}{1.c} x + \frac{a(a+1) b(b+1)}{1.2.c(c+1)} x^2 + \ldots;$$

l'exprimer au moyen de l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{c-a-1} (1-zx)^{-b} dz,$$

et en déduire F$(a, b, c, 1)$ *exprimé par la fonction gamma* ([1]) (Gauss)

$$(1-zx)^{-b} = 1 + \sum_1^\infty \frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1.2\ldots n} x^n.$$

([1]) HERMITE, *Cours*, 4ᵉ édition, 1891.

Posons donc

$$J = \sum_0^\infty J_n x^n,$$

on a

$$J_n = \frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!}\,\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)};$$

mais

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\ldots(a+n-1)\Gamma(a),$$

d'où

$$J = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\,F(a, b, c, x),$$

et, pour $x = 1$,

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\,F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)}.$$

Remarque. — Il faut, bien entendu, que la série converge, pour $x = 1$. Or

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1+n}{a+n}\,\frac{c+n}{b+n}\cdot\frac{1}{x}.$$

Soient

$$a = a' + ia'', \qquad b = b' + ib'', \qquad c = c' + ic'',$$

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|_{x=1} = \sqrt{1 + \frac{2}{n}(1 + c' - a' - b')\ldots} = 1 + \frac{1}{n}(1 + c' - a' - b')\ldots,$$

d'où la convergence pour

$$c' - a' - b' > 0,$$

d'où la divergence pour

$$c' - a' - b' \leqq 0.$$

Rappelons que F satisfait à l'équation

$$(x - x^2)F'' + [c - (a+b+1)x]F' - abF = 0,$$

ce qui se vérifie de suite (C. Jordan, *Cours*, t. I).

4. — EXTENSION ANALYTIQUE DE LA FONCTION GAMMA.

a étant réel positif, ne pouvant pas, d'ailleurs, tendre vers zéro, écrivons, avec M. Prym ([1]),

$$\Gamma(a) = \int_0^1 + \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx = P(a) + Q(a).$$

Dans la première quadrature, développons e^{-x} en série, il vient

$$P(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2(a+2)} - \frac{1}{1.2.3(a+3)} \cdots$$

Or, ceci représente, a étant complexe, une fonction méromorphe dans tout le plan, ayant pour pôles : o, — 1, — 2, ...

Dans la seconde quadrature, d'où la valeur *zéro* de x est exclue, écrivons

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} \left[1 + \frac{a\,\mathfrak{L}x}{1} + \frac{(a\,\mathfrak{L}x)^2}{1.2} + \ldots\right] dx.$$

Ceci est une fonction entière de a, $Q(a)$. Nous pouvons donc faire l'extension analytique en prenant pour Γ la *définition*

$$\Gamma = P + Q.$$

Cela fait, M. Gram ([2]) a obtenu de nouvelles quadratures représentant Γ dans les diverses régions du plan.

Écrivons

$$e^{-x} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

$$J_1 = \int_0^\infty (e^{-x} - 1) x^{a-1} dx$$

([1]) HERMITE, *Cours lith.*

([2]) *Acta mathematica*, t. XXVII.

est bien défini pour

$$-1 < \mathfrak{R}(a) < 0;$$

$J_1 = J'_1 + J''_1$, deux parties correspondant aux intervalles d'intégration $0 - 1$, $1 - \infty$.

Or,

$$J'_1 = P(a) + f, \qquad J''_1 = Q(a) - f,$$

donc

$$J_1 = P + Q;$$

donc c'est une expression de la fonction gamma pour les valeurs considérées de a.

De même

$$J_2 = \int_0^{\infty} (e^{-x} - 1 - a_1 x)\, x^{a-1}\, dx$$

représentera la fonction gamma pour

$$-2 < \mathfrak{R}(a) < -1.$$

Etc.

5. — FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Développer en série $\zeta(s+1)$, Soit $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$; nous avons

$$(1) \quad \zeta(s+1) - \frac{1}{s} = \frac{1}{\Pi(s)} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{x} \right) x^s\, dx \quad \text{(Stieltjes).}$$

On a

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-nx}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{n^a} = \frac{\Pi(s)}{n^{s+1}},$$

$$a = s + 1 \qquad \text{(Gauss);}$$

$$\Pi(s)\zeta(s+1) = \int_0^{\infty} x^s (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} \ldots)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^s\, dx}{e^x - 1} \qquad \text{(Riemann),}$$

d'où la relation (1).

Développons en série l'intégrale du second membre de (1) (Stieltjes) :

$$(2)\qquad \zeta(s+1) - \frac{1}{s} = \frac{1}{\Pi(s)}\left(a_0 + \frac{a_1}{1}s + \frac{a_2}{1.2}s^2 + \ldots\right),$$

$$(3)\qquad a_n = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{x}\right)(\mathcal{L}x)^n\,dx.$$

Pour évaluer a_n, partons de $\Pi(s)$ et dérivons n fois :

$$\Pi(s) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx,$$

$$(4)\qquad \Pi^{(n)}(0) = \int_0^\infty (\mathcal{L}x)^n e^{-x}\,dx.$$

Posons

$$x = kx' \qquad (k > 0);$$

cela donne

$$(4')\qquad \Pi^{(n)}(0) = k\int_0^\infty (\mathcal{L}kx)^n\, e^{-kx}\,dx,$$

d'où nous pouvons tirer

$$\int_0^\infty (\mathcal{L}x)^n e^{-kx}\,dx = \mathrm{A}_k.$$

Soit, en effet,

$$\mathcal{L}kx = \mathrm{T} = \mathcal{L}x + \mathcal{L}k,$$

d'où

$$(5)\qquad \mathrm{A}_k = \int_0^\infty (\mathrm{T} - \mathcal{L}k)^n e^{-kx}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\mathrm{T}^n - \frac{n}{1}\mathrm{T}^{n-1}\mathcal{L}k + \ldots\right)e^{-kx}\,dx$$

$$= \frac{\Pi^{(n)}(0)}{k} - \frac{n}{1}\Pi^{(n-1)}(0)\frac{\mathcal{L}k}{k} + \ldots.$$

Effectuons la somme $\mathrm{S}_r = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_r$:

$$\mathrm{S}_r = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-(r+1)x}}{1 - e^{-x}}(\mathcal{L}x)^n\,dx \qquad [\Pi_0^{(n)} \equiv \Pi^{(n)}(0)]$$

$$= \Pi_0^{(n)}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right)$$

$$- \frac{n}{1}\Pi_0^{(n-1)}\left[\frac{\mathcal{L}2}{2} + \frac{\mathcal{L}3}{3} + \ldots + \frac{\mathcal{L}r}{r}\right]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\Pi_0^{(n-2)}\left[\frac{(\mathcal{L}2)^2}{2} + \ldots + \frac{(\mathcal{L}r)^2}{r}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous pouvons encore écrire

$$S_r = \int_0^\infty (\mathcal{L}x)^n \Big(\underbrace{\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x}}_{(1)} + \underbrace{\frac{e^{-x} - e^{-(r+1)x}}{x}}_{(2)} + \underbrace{\frac{e^{-(r+1)x}}{x} - \frac{e^{-(r+1)x}}{1-e^{-x}}}_{(3)} \Big)\, dx,$$

d'où trois intégrales.

La première est a_n, la troisième tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, la deuxième se calcule facilement par dérivation. La dérivée par rapport à r est A_{r+1}, donnée par (5); la fonction est nulle pour $r = 0$, et s'obtient en intégrant A_{r+1} terme à terme, d'où, *si l'on peut passer à la limite* $r = \infty$,

$$(6)\quad a_n = \lim_{r=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \Pi_0^{(n)} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r} - \mathcal{L}(r+1) \right] \\ - \frac{n}{1} \Pi_0^{(n-1)} \left\{ \frac{\mathcal{L}2}{2} + \ldots + \frac{\mathcal{L}r}{r} - \frac{1}{2} [\mathcal{L}(r+1)]^2 \right\} \\ + \frac{n(n-1)}{1.2} \Pi_0^{(n-2)} \left\{ \frac{(\mathcal{L}2)^2}{2} + \ldots + \frac{(\mathcal{L}r)^2}{r} - \frac{1}{3} [\mathcal{L}(r+1)]^3 \right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Posant

$$C_k = \frac{(\mathcal{L}2)^k}{2} + \ldots + \frac{(\mathcal{L}r)^k}{r} - \frac{1}{k+1} [\mathcal{L}(r+1)]^{k+1}$$

$$(\text{pour } r = \infty),$$

$$(7)\qquad a_n = \Pi_0^{(n)} C - \frac{n}{1} \Pi_0^{(n-1)} C_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Pi_0^{(n-2)} C_2 \ldots.$$

Ceci montre qu'on a

$$\sum \frac{a_n}{n!} s^n = \left(C - C_1 s + \frac{C_2}{1.2} s^2 \ldots \right) \left(\sum \frac{\Pi^{(n)}(0)}{n!} s^n \right),$$

$$(8)\qquad \zeta(s+1) - \frac{1}{s} = C - C_1 s + \frac{C_2}{1.2} s^2 - \frac{C_3}{1.2.3} s^3 \ldots.$$

Remarque. — Toutes les intégrales ont un sens bien défini, car

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{(\mathcal{L}x)^n}{x} dx$$

n'est pas déterminé, mais

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} (\mathcal{L}x)^n\, dx$$

tend vers zéro quand ε et ε' tendent vers o.

La troisième, dans S_r, tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. En effet, nous écrirons $r = r' + r''$. Nous prendrons r' tel que l'intégrale où r serait r' *ait un sens*. Il nous reste en facteur $e^{-(r''+1)x}$ que nous pouvons mettre hors du signe. (On écrit

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{h} + \int_h^{L} + \int_L^{\infty},$$

et l'on remarque que $\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ n'a pas une infinité de racines.)

Quant à C, C_1, C_2, ..., ce sont des nombres bien déterminés, comme on le voit en construisant la courbe

$$y = \frac{\overline{\mathcal{L}x}^{k}}{x}.$$

On a, par exemple,

$$\frac{\mathcal{L}2}{2} + \ldots + \frac{\mathcal{L}p}{p} < \int_1^{p+1} \frac{\mathcal{L}x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{L}(p+1)}^{2}$$

ou

$$\varphi_p - \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{L}(p+1)}^{2} < 0.$$

D'ailleurs

$$\varphi_{p+1} - \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{L}(p+2)}^{2} > \varphi_p - \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{L}(p+1)}^{2}.$$

Nous avons donc des nombres croissants avec l'indice p, toujours moindres que zéro. Ils ont une limite.

Par la formule (8) on vérifiera ce théorème de M. de la Vallée-Poussin (1) :

$$\lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] = C.$$

(1) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1896, et *Mémoire sur la fonction de Riemann*, Bruxelles, 1899.

6. — EXTENSION DE LA FONCTION ZÊTA [1], ANALOGUE A CELLE DE LA FONCTION GAMMA.

Démontrer que la fonction a pour pôle le point $+1$ *et pour zéros les points*

$$-2,\quad -4,\quad -6,\quad \dots.$$

Écrivons, avec Hermite [2],

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1} = \mathrm{F}(s) + \mathrm{G}(s).$$

Ayant choisi, parmi les valeurs de x^{s-1}, nous pouvons poser

$$\mathrm{G}(s) = \int_{\omega}^{\infty} \frac{dx}{x(e^x-1)}\left[1 + \frac{s\,\mathfrak{L}x}{1} + \frac{(s\,\mathfrak{L}x)^2}{1.2} + \dots\right].$$

Ce qui donne une fonction holomorphe dans tout le plan.

Pour la première intégrale, faisons intervenir les nombres de Bernoulli

$$\frac{x}{e^x-1} = -\frac{x}{2} + 1 + \mathrm{B}_1\frac{x^2}{2!} - \mathrm{B}_2\frac{x^4}{4!}\;\dots,$$

$$\mathrm{F}(s) = \omega^{s-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{\omega}{2s} - \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\frac{\mathrm{B}_n\omega^{2n}}{2n+s-1}\right].$$

La série converge pour $\omega < 2\pi$, d'après la relation

$$\frac{\mathrm{B}_n}{(2n)!} = \frac{2}{(2\pi)^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \dots\right).$$

F représente une fonction méromorphe admettant les *pôles* $+1, 0, -1, -3, -5, \dots$; Γ admettant les *pôles* $0, -1, -2, -3, \dots$, on voit que $\zeta(s)$ a pour *pôle* le point $+1$, pour *zéros* les points $-2, -4, \dots$, et a pour valeur, au point $-2n+1$,

$$\frac{(-1)^n\mathrm{B}_n}{2n}.$$

---

[1] On sait que la fonction zêta donne des *lois asymptotiques*, dans la théorie des *nombres premiers*.

[2] *Comptes rendus*, 1885.



Car, en effet, on a

$$\lim_{s=-2n+1} (2n+s-1)\Gamma(s) = \frac{-1}{(2n-1)!}.$$

Prenons $\omega = 1$ et écrivons encore

$$\Gamma(s)\zeta(s) = F + G,$$

$$F = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{B_2}{2!}\frac{1}{s+1}, \quad \ldots,$$

$$G = \int_0^\infty \frac{1}{x(e^x-1)}\left(1 + \frac{s\,\mathcal{L}x}{1} + \ldots\right)dx.$$

Soit

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + b_1 x + b_2 x^2 \ldots;$$

$$J_1 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx$$

est bien déterminé pour

$$0 < \mathcal{R}(s) < 1;$$

$$J_2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) x^{s-1}\,dx$$

est bien déterminé pour

$$-1 < \mathcal{R}(s) < 0.$$

Etc.

D'ailleurs, comme pour Γ, on vérifie de suite que J_1, J_2, ... représentent bien $F + G$ dans les divers domaines fixés pour $\mathcal{R}(s)$.

Ici encore, d'une intégrale nous passons à des séries et de celles-ci à de nouvelles intégrales (1).

---

(1) GRAM, *Acta mathematica*, t. XXVII. — HERMITE, *Cours*, Gauthier-Villars, 1873. — HERMITE et STIELTJES, *Correspondance*. — N. NIELSEN, *Zylinder funktionen*, 1904, et *Gamma funktionen*, 1906, Teubner, Leipzig. — RIEMANN-WEBER, *Partiellen Differential-Gleichungen*, Vieweg, Braunschweig.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE.

L'équation aux dérivées partielles qui est la mieux connue, dans le type elliptique, est l'*équation de Laplace*.

La *Physique*, aussi bien que la *théorie des fonctions analytiques*, pose à son sujet le *problème de Dirichlet*.

La question est énorme ; nous ne donnons qu'une esquisse de la solution, après quelques préliminaires sur les *Déterminants*, les *Potentiels de simple et double couche*, les *Équations intégrales*, la *Fonction de Green*, etc.

INTRODUCTION.

I. — Déterminants.

1. *Déduire l'expression du produit de deux déterminants de l'étude du système linéaire*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} (a-\lambda)x + by + cz = 0, \\ a_1 x + (b_1 - \lambda)y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + (c_2 - \lambda)z = 0. \end{cases}$$

Représentons par P, Q, R les premiers membres de (I) et écrivons le système

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \alpha P + \alpha_1 Q + \alpha_2 R = 0, \\ \beta P + \beta_1 Q + \beta_2 R = 0, \\ \gamma P + \gamma_1 Q + \gamma_2 R = 0. \end{cases}$$

Soit D son déterminant.

D'après la règle de Cramer, si D *n'est pas nul*, le système (II) n'a d'autres solutions que $P = Q = R = 0$.



Donc, pour $D \neq 0$, les systèmes (I), (II) sont *équivalents*. Écrivons leurs déterminants respectifs

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ a_1 & b_1-\lambda & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-\lambda \end{vmatrix},$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha(a-\lambda)+\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2 & '' & '' \\ \beta(a-\lambda)+\beta_1 a_1+\beta_2 a_2 & '' & '' \\ \gamma(a-\lambda)+\gamma_1 a_1+\gamma_2 a_2 & '' & '' \end{vmatrix}.$$

Si δ_1 est *nul,* (I) admet d'*autres* solutions que

$$x = y = z = 0;$$

donc δ_2 doit être *nul* aussi.

Donc les équations en λ, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, ont *les mêmes racines*.

Écrivons que le produit des racines est le même :

$$\begin{vmatrix} a\alpha+a_1\alpha_1+a_2\alpha_2 & b\alpha+b_1\alpha_1+b_2\alpha_2 & c\alpha+c_1\alpha_1+c_2\alpha_2 \\ a\beta+a_1\beta_1+a_2\beta_2 & b\beta+b_1\beta_1+b_2\beta_2 & c\beta+c_1\beta_1+c_2\beta_2 \\ a\gamma+a_1\gamma_1+a_2\gamma_2 & b\gamma+b_1\gamma_1+b_2\gamma_2 & c\gamma+c_1\gamma_1+c_2\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

2. *Développer, par rapport aux puissances de* h, *les déterminants*

$$A = \begin{vmatrix} 1+ha_{11} & 0+ha_{12} & 0+ha_{13} & 0+ha_{14} \\ 0+ha_{21} & 1+ha_{22} & 0+ha_{23} & 0+ha_{24} \\ 0+ha_{31} & 0+ha_{32} & 1+ha_{33} & 0+ha_{34} \\ 0+ha_{41} & 0+ha_{42} & 0+ha_{43} & 1+ha_{44} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 1+ha_{11} & 0+ha_{12} & 0+ha_{13} & b_1 \\ 0+ha_{21} & 1+ha_{22} & 0+ha_{23} & b_2 \\ 0+ha_{31} & 0+ha_{32} & 1+ha_{33} & b_3 \\ 0+hc_1 & 0+hc_2 & 0+hc_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Développer un déterminant quelconque en vidant la diagonale principale. — Le déterminant A, d'après la

définition même, est une somme de déterminants obtenus en groupant quatre colonnes partielles *dans leur ordre*.

La constante est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Un terme en h^2 est donné par

$$\begin{vmatrix} ha_{11} & ha_{12} & 0 & 0 \\ ha_{21} & ha_{22} & 0 & 0 \\ ha_{31} & ha_{32} & 1 & 0 \\ ha_{41} & ha_{42} & 0 & 1 \end{vmatrix} = h^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Remarquons que, si nous prenons *tous* les déterminants analogues, nous en prenons deux fois trop, car nous supposerions que nous avons à prendre d'abord la colonne 1 avec la colonne 2, puis la colonne 2 mise la première, avec la colonne 1 écrite ensuite, etc.

Si donc le symbole $\sum$ représente une sommation relative à tous les groupes d'indices ij, nous écrivons le coefficient de h^2

$$\frac{1}{\underline{|2}} \sum \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}.$$

De même, nous aurons un terme

$$h^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

et comme un système de colonnes ijk doit figurer *une* seule fois, alors qu'il a $\underline{|3}$ permutations de 3 indices, nous écrirons le coefficient de h^3

$$\frac{1}{\underline{|3}} \sum \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Tout ceci subsiste quel que soit l'ordre du déterminant. $\sum$ pourrait aussi bien être une sommation avec indices non différents entre eux, dans un même système, le déterminant correspondant étant *nul*.

Procédons de même pour B. Il n'y a pas de constante; un terme en h sera

$$\begin{vmatrix} ha_{11} & 0 & 0 & b_1 \\ ha_{21} & 1 & 0 & b_2 \\ ha_{31} & 0 & 1 & b_3 \\ hc_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Un terme en h^2 sera

$$\begin{vmatrix} ha_{11} & ha_{12} & 0 & b_1 \\ ha_{21} & ha_{22} & 0 & b_2 \\ ha_{31} & ha_{32} & 1 & b_3 \\ hc_1 & hc_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = h^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le mineur bordé indique les éléments auxquels s'appliquera la sommation, avec la même remarque que l'on doit diviser par $\underline{|2}$ pour h^2, etc.

3. Mettons zéro, dans un déterminant, *sur toute la diagonale principale;* nous pouvons le faire en ajoutant ce qui a été enlevé, c'est-à-dire en ajoutant, de toutes les manières, le produit de k termes de la diagonale par le mineur correspondant, vidé aussi. Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ a_{11} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{13} \\ a_{31} & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + a_{11} a_{22} a_{33}.$$

4. *Soit* b_{ik} *l'imaginaire conjuguée de* a_{ik}; *soient les*

deux déterminants conjugués

$$A = \| a_{ik} \|, \qquad B = \| b_{ik} \|.$$

Montrer que le produit AB *a pour maximum le produit des termes de sa diagonale principale.*

(J. Hadamard.)

Supposons le déterminant A du troisième ordre. Les termes de la diagonale principale, dans le produit AB, sont

$$s_1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13},$$
$$s_2 = a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23},$$
$$s_3 = a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{23}.$$

Nous voulons prouver la relation

(1) $$AB \leqq s_1 s_2 s_3$$

par la méthode de Lagrange, après avoir établi les relations

(2) $$s_1 = s_2 = s_3 = 1,$$

ce qui revient à diviser les éléments de la première ligne par $\sqrt{s_1}$, ...

Prouvons donc que le maximum de AB est égal à *un*.

Nous devons différencier la fonction

(3) $$F = AB - \lambda_1 s_1 - \lambda_2 s_2 - \lambda_3 s_3,$$
$$dF = \sum_{ik} [BA_{ik}\, da_{ik} + AB_{ik}\, db_{ik} - \lambda_i(a_{ik}\, db_{ik} + b_{ik}\, da_{ik})].$$

Annulons ceci, d'où

(4) $$BA_{ik} = \lambda_i b_{ik}, \qquad AB_{ik} = \lambda_i a_{ik}.$$

D'après les relations (2) et (4), on a

$$A \sum_k B_{ik} b_{ik} = \lambda_i \sum_k a_{ik} b_{ik},$$

c'est-à-dire

(5) $$AB = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda.$$

Formons le produit des déterminants

$$\| A_{ik} \| = A^2, \qquad \| B_{ik} \| = B^2,$$

en remarquant que (4) ramène ces déterminants aux déterminants A et B. On a

$$A^2B^2 = \frac{\lambda^3}{B^3} B \frac{\lambda^3}{A^3} A,$$

$$AB = \lambda^6. \tag{6}$$

Comparons (5) et (6) :

$$\lambda = \lambda^6 = 1.$$

Le *maximum* est bien obtenu.

Cette démonstration du théorème de M. Hadamard est due à M. W. Wirtinger (¹).

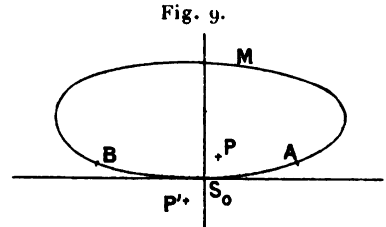
II. — Théorie du potentiel.

1. *Potentiel logarithmique de simple couche.* — Soit une courbe fermée, plane, sans singularités, et dont le *rayon de courbure* est *dérivable*.

Soit r_{ps} la distance d'un point quelconque p à un point de la courbe fixé par la valeur s de l'arc.

Soit $\mu(s)$ une fonction continue (densité) attachée à la courbe C.

Fig. 9.



Le potentiel est défini par l'intégrale prise tout le long de C :

$$V_p = \int_C \mu(s) \mathcal{L} \frac{1}{r_{ps}} ds. \tag{1}$$

(Dans l'espace on prend $\frac{1}{r}$ au lieu du *logarithme*.)

(¹) *Voir* aussi : Ernst Fischer, *Archiv der Math. u. Physik,* III. Reihe. XIII, qui renvoie au beau livre de H. Minkowski : *Geometrie der Zahlen,* 1896.

1° *Si le point p vient sur la courbe,* en s_0, *le potentiel existe encore.*

2° *Le potentiel est continu quand on traverse la courbe.*

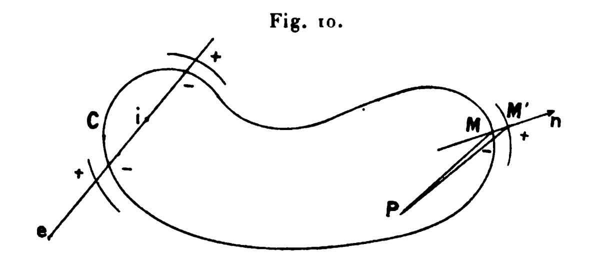
Ces théorèmes classiques s'établissent facilement.

Pour le premier, on partage la courbe en deux parties : BMA + BA (*fig.* 9); s_0A et s_0B seront infiniment petits de l'ordre de η.

Pour le second, même partage, mais il faut avoir soin de prendre s_0A et s_0B *infiniment petits,* mais *infiniment grands* par rapport à s_0P, s_0P'; par exemple, s_0A sera de l'ordre de η, s_0P sera de l'ordre de η^{1+h}, $h > 0$.

2. *Potentiel logarithmique de double couche.* — Soit un contour C, régulier (*fig.* 10). Au point M, nous avons

Fig. 10.



une masse -1; au point voisin M', sur la normale extérieure, une masse $+1$.

L'ensemble des deux masses crée, en un point P, un potentiel égal à

$$U = \mathfrak{L}\frac{1}{\overline{PM'}} - \mathfrak{L}\frac{1}{\overline{PM}}, \tag{1}$$

et $\overline{MM'}\frac{d}{dn}\mathfrak{L}\frac{1}{r_{ps}}$ est sa *valeur principale* lorsque $\overline{MM'}$ est infiniment petit (nous représentons $\overline{PM}$ par r_{ps}).

D'après un calcul immédiat

$$\frac{d}{dn}\mathfrak{L}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r}\cos(n, r), \tag{2}$$

l'angle étant celui de la direction $\overline{PM}$ avec la direction n, *normale extérieure*.

Si, en M, nous avions une couche de densité $\mu(s)$, le potentiel U', en P, provenant de l'arc de courbe $MM_1 = ds$, serait donc

$$-\overline{MM'}\mu(s)\frac{\cos(n, r)}{r}ds,$$

et pour toute la courbe il suffirait d'intégrer.

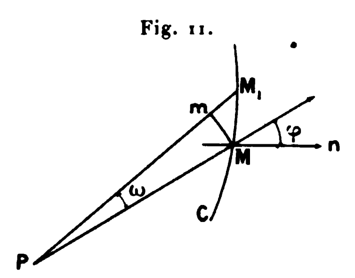
Supposons μ *infini* de telle sorte que $\overline{MM'}.\mu = \nu(s)$, *fini;* enfin changeons de signe, U étant < 0 lorsque le rayon PM rencontre d'abord la couche négative, puis la couche positive.

Par définition, le potentiel de double couche est (*fig.* 11)

$$(3) \qquad W_p = \int_C \nu(s)\frac{\cos\varphi}{r_{ps}}ds.$$

Traçons l'arc de cercle Mm de centre P et de rayon PM;

Fig. 11.



le triangle MmM₁ peut être regardé comme rectangle, d'où

$$\frac{\cos\varphi}{r_{ps}} = d\omega_{ps},$$

ω étant l'angle au centre en P; d'où [1]

$$(4) \qquad W_p = \int_C \nu(s)\,d\omega_{ps},$$

$d\omega_{ps}$ étant *positif* quand le rayon PM rencontre *d'abord* la couche *négative*, négatif dans le cas contraire.

[1] HENRI POINCARÉ, *Potentiel newtonien*.

3. *Théorèmes généraux.* — 1° *Lorsque la densité est constante et égale à* 1 : *en tout point* i, intérieur au contour, *le potentiel double est égal à* 2π; *en tout point* s_0, sur le contour, *le potentiel double est égal à* π; *il est nul en tout point* e extérieur.

Cela résulte de (4).

2° *Soient* W_0, W_i, W_e *les potentiels doubles en un point* s_0, sur C, *où la densité est* ν_0, *en un point intérieur,* infiniment voisin, *et en un point extérieur,* infiniment voisin; *on a*

$$W_i - 2\pi\nu_0 = W_0 - \pi\nu_0 = W_e. \tag{5}$$

Autour de s_0, comme précédemment, prenons l'arc AB de l'ordre de η, les distances $s_0 i$, $s_0 e$ étant de l'ordre de η^{1+h} ($h > 0$). Puis écrivons (4) sous cette forme

$$W_p = \nu_0 \int_C d\omega_{ps} + \int_C (\nu - \nu_0)\, d\omega_{ps},$$

la deuxième intégrale étant mise sous la forme

$$\int_{AMB} + \int_{AB} = J + j.$$

Quand p occupe les positions i, s_0, e, la première intégrale a les valeurs

$$2\pi\nu_0, \quad \pi\nu_0, \quad 0.$$

En ces trois points, les valeurs de J sont infiniment voisines, quand les points sont infiniment voisins.

Enfin, dans j figure la fonction $(\nu - \nu_0)$ qui, ν étant *continu,* est infiniment petite avec l'arc AB.

D'où la formule (5).

On peut écrire ce résultat ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} &W_i - W_e = 2\pi\nu_0, \\ &W_0 = \frac{W_i + W_e}{2} = \int_C \nu(s) \frac{d}{dn} \mathcal{L} \frac{1}{r_{ss_0}}\, ds. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

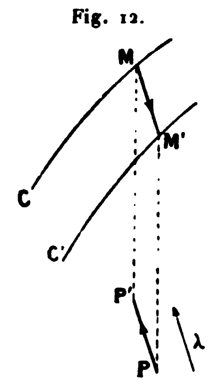
On le traduira ainsi : *le potentiel double est* discontinu *sur le contour, tandis que le potentiel simple est* continu.

4. *Dérivée normale du potentiel de simple couche* (*fig.* 12). — Soient un contour C et une direction λ. Si P vient en P′, effectuant un déplacement $d\lambda$, nous avons une variation de potentiel

$$\Delta V_p = \int_C \mu \left(\mathcal{L} \frac{1}{r_{p's}} - \mathcal{L} \frac{1}{r_{ps}} \right) ds.$$

Au contraire, laissons P *fixe* et donnons à la courbe C *la*

Fig. 12.



translation $-d\lambda$; nous avons la même variation, puisque $\overline{PM'} = \overline{P'M}$, d'où

$$(7) \quad \frac{dV_p}{d\lambda} = -\int_C \mu \left[\cos(s, \lambda) \frac{d}{ds} \mathcal{L} \frac{1}{r_{ps}} + \cos(n, \lambda) \frac{d}{dn} \mathcal{L} \frac{1}{r_{ps}} \right] ds.$$

Supposons $\mu(s)$ *dérivable* et intégrons par parties. La partie intégrée est nulle et il reste

$$+\int_C \rho \mathcal{L} \frac{1}{r_{ps}} ds - \int_C \nu \frac{d}{dn} \mathcal{L} \frac{1}{r_{ps}} ds,$$

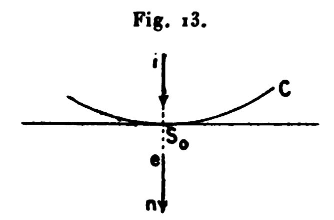
en posant

$$\nu = \mu \cos(n, \lambda),$$
$$\rho = \frac{d}{ds} [\mu \cos(s, \lambda)].$$

La première intégrale est un potentiel simple, la seconde un potentiel double.

Supposons que λ soit la direction de la normale *inté-*

Fig. 13.



rieure (*fig.* 13) au point s_0 sur C. En ce point

$$\nu_0 = \mu_0,$$

la formule (6) donne

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_i - \left(\frac{dV}{dn}\right)_e = -2\pi\mu_0,$$

le potentiel double étant affecté du signe — et le potentiel simple étant continu.

Les formules (6) et (7) donnent encore

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_i + \left(\frac{dV}{dn}\right)_e\right] = \int_C -\mu\cos(n_s, n_{s_0})\frac{d}{dn_s}\mathcal{L}\frac{1}{r_{s_0 s}}ds$$
$$+\int_C -\mu\cos(s, n_{s_0})\frac{d}{ds}\mathcal{L}\frac{1}{r_{s_0 s}}ds.$$

Il est bien entendu que n_s est la normale intérieure au point *mobile* s de la courbe, n_{s_0} étant la normale intérieure en s_0, qui est *fixe*.

On a

$$\frac{d}{dn_s}\mathcal{L}\frac{1}{r_{s_0 s}} = \frac{\cos\varphi}{r_{s_0 s}}.$$

D'où, pour la demi-somme, la valeur :

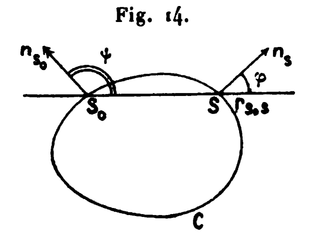
$$\int_C \mu\frac{\cos\omega}{r_{s_0 s}}ds \qquad [\omega = \pi - \psi \ (\textit{fig. } 14)].$$

Nous observons, d'ailleurs, que :

$$\frac{\cos\omega}{r_{s_0 s}} = \frac{d}{dn_{s_0}} \mathcal{L} \frac{1}{r_{ss_0}}.$$

Pour éviter toute confusion (*fig.* 14), nous désignons

Fig. 14.



par un accent la *normale intérieure :*

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dV}{dn'_{s_0}}\right)_e - \left(\dfrac{dV}{dn'_{s_0}}\right)_i = 2\pi\mu(s_0), \\ 2\displaystyle\int_C \mu \frac{\cos\omega}{r_{s_0 s}} ds = \left(\dfrac{dV}{dn'_{s_0}}\right)_e + \left(\dfrac{dV}{dn'_{s_0}}\right)_i, \\ \omega = \pi - \psi. \end{cases}$$

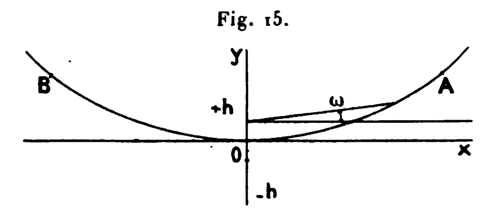
J'ai suivi le mode d'exposition de M. Darboux (*Cours de la Sorbonne,* 1907); M. Plemelj a établi la deuxième formule (8) en 1904 (*Monatshefte für Mathem. und Physik*) et M. Picard en a donné une élégante démonstration (*Ann. de l'École Norm. sup.,* 1906).

5. *Dérivée normale du potentiel de double couche.* — Soient la normale en s_0, sur cette normale deux points i et e. Quand ces deux points deviennent infiniment voisins, la différence des dérivées du potentiel double suivant la normale n_{s_0} devient infiniment petite. Les potentiels simple et double ont leurs propriétés *inverses* l'une de l'autre. Montrons-le.

Prenons pour origine le point s_0 et la tangente pour axe des x (*fig.* 15).

Décomposons toujours la courbe fermée en deux parties, OA et OB étant de l'ordre de η, qui tendra vers zéro, et soient deux points sur la normale, de cotes $\pm h$, h étant de l'ordre de η^{1+k} $(k > 0)$

Fig. 15.



Soit W le potentiel double

$$W = W' + W'',$$

W' étant relatif à l'arc AOB et W'' à l'arc BMA.

Bien entendu, comme précédemment, $\frac{d}{dh}(W''_{+h} - W''_{-h})$ tend vers zéro avec η.

Il reste à étudier la différence relative à l'arc AB, qui deviendra infiniment petit :

$$W'_{+h} = \int_A^B \nu(x)\, d \operatorname{arc\,tang} \frac{y-h}{x}$$

(nous pouvons toujours supposer l'arc confondu avec la tangente, AB devant tendre vers zéro). Écrivons, avec M. Darboux (*Cours* de 1907),

$$\frac{dW'_{+h}}{dh} = -\int_A^B \nu\, d\frac{x}{x^2+(y-h)^2},$$

$$\frac{d}{dh}(W'_{+h} - W'_{-h}) = \int_A^B \nu\, df,$$

en posant

$$f = \frac{x}{x^2+(y+h)^2} - \frac{x}{x^2+(y-h)^2};$$

ν étant *continu*, si le module de f reste fini, le théorème est établi.

Pour

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad f_0 = \frac{0}{h^4} = 0.$$

Nous pouvons remplacer y par $K\frac{x^2}{2}$, y' par Kx, puisque AB va tendre vers zéro. Annulons la dérivée de f par rapport à x, ce qui donne

$$(x^2+y^2+h^2)[3(x^2+y^2+h^2) \\ -4x(x+yy')] - 12h^2y^2 + 8h^2xyy' = 0.$$

Aux environs de l'origine, la dérivée s'annule pour $x = \pm\sqrt{3}$, l'ensemble des termes d'ordre moindre étant

$$h^2(-x^2+3h^2).$$

Ecrivons f sous la forme $\frac{4xyh}{(x^2+y^2+h^2)^2-4h^2y^2}$; on voit que ces points $\pm h\sqrt{3}$ sont des maxima et minima, *finis,* car f contient h^4 au numérateur et au dénominateur.

Donc, h tendant vers zéro, les deux dérivées normales ont même limite.

[Nous avons supposé la densité dérivable et $y(x)$ trois fois dérivable.]

ÉQUATION DE LAPLACE.

PROBLÈMES DE DIRICHLET. FONCTIONS DE GREEN.

1. *Les fonctions de Green.* — Nous cherchons une solution de

(1) $$\delta U \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en fonction de certaines données portées par un contour fermé C, régulier, dans le plan xOy. Appliquons la formule de Green, avec une fonction V, *harmonique, infinie* au point (a, b),

$$V = \mathcal{L}\frac{1}{r} = \mathcal{L}\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}.$$

Un raisonnement classique donne de suite [1]

$$(2) \qquad 2\pi U(a, b) = \int_C \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) ds.$$

Il semble que le problème de Cauchy soit résolu, avec les données portées, non par un segment ouvert de courbe, mais par une courbe fermée.

Il n'en est rien.

Une solution de (1) vérifiera l'équation (2), mais n'est pas donnée par (2).

Il suffit, en effet, de remarquer que la valeur de U, fournie par (2), *ne converge pas* à la frontière, c'est-à-dire *ne tend pas* vers la valeur donnée au point M de C quand le point (a, b) tend vers M.

Parce que la courbe C est *fermée,* la démonstration du théorème classique de Cauchy-Kowalesky ne vaut plus et l'on sait aujourd'hui que deux problèmes sont résolubles : le PREMIER PROBLÈME DE DIRICHLET, où l'on donne U seul sur C; le SECOND PROBLÈME, OU PROBLÈME DE NEUMANN, où l'on donne $\frac{dU}{dn}$ seul.

Regardons la formule (2) et soit la *fonction de Green :*

$$G = V + H.$$

V est le logarithme précédent, H est régulière et harmonique dans toute l'aire, G s'annule sur le bord de l'aire; alors

$$(3) \qquad 2\pi U(a, b) = \int_C U \frac{dG}{dn} ds.$$

En général, d'ailleurs, former G est exactement aussi difficile que former U; mais, dans des cas simples, G est facile à écrire.

---

[1] E. PICARD, *Traité d'Analyse,* t. II. — C. JORDAN, *Cours d'Analyse,* t. II.

2. *Premier cas.* — C est un cercle.

Menons $A_1(a_1, b_1)$, image de $A(a, b)$:

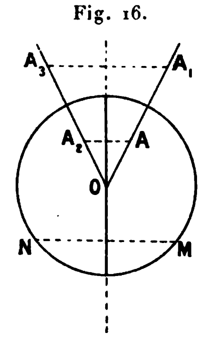
$$OA.OA_1 = R^2 \quad \text{ou} \quad \frac{MA_1}{MA} = \frac{R}{OA}.$$

Donc

$$G = \mathcal{L}\frac{MA_1}{MA}\frac{OA}{R}.$$

En effet, G est harmonique, nul sur le cercle, ayant un infini logarithmique quand M vient en A.

Fig. 16.



Second cas. — C est un demi-cercle avec son diamètre.

Menons encore l'image A_1 de A, puis A_2 et A_3 images de A et A_1 par rapport au diamètre.

La considération de N, image de M, par rapport au diamètre, donne de même

$$G = \mathcal{L}\frac{MA_1}{MA}\frac{MA_2}{MA_3}.$$

3. *Second problème.* — On donne $\frac{dV}{dn}$. Dans le *plan*, grâce à la fonction conjuguée (théorie des fonctions), on ramène de suite au problème de Dirichlet, comme l'a remarqué M. Dini.

Dans l'*espace*, c'est un nouveau problème, avec une fonction Green-Klein (1).

4. *Problème de Dirichlet dans le cas du cercle. Théorèmes généraux.* — Pour le cas du plan, nous pouvons

(1) J. Hadamard, *Leçons sur les Ondes*, Hermann.

associer à une fonction harmonique $P(x, y)$ la conjuguée $Q(x, y)$, dont la différentielle est connue quand P est donné.

Soit μ une direction faisant avec la direction λ un angle égal à $+90°$,

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{dQ}{d\mu}.$$

Intégrale de Poisson. — Prenons un cercle. ψ est l'angle au centre, la donnée est $U(\psi)$, $ds = R\,d\psi$. Soit $z = x + iy$ un point M sur le cercle; soient $\alpha = a + ib$ et $\alpha_1 = a_1 + ib_1$ les points A et A_1. Soit V l'angle A_1MA; on a

$$\mathcal{L}\frac{OA}{R}\,\frac{z-\alpha_1}{z-\alpha} = G + iV;$$

d'où

$$\frac{dG}{dn_i} = -\frac{dV}{ds},$$

$$\operatorname{tang} V = \frac{(y-b_1)(x-a)-(y-b)(x-a_1)}{(x-a)(x-a_1)+(y-b)(y-b_1)};$$

d'où

$$2\pi U(a, b) = \int_0^{2\pi} U(\psi)\,\frac{R^2 - \overline{OA}^2}{\overline{MA}^2}\,d\psi,$$

$$2\pi U(0, 0) = \int_0^{2\pi} U(\psi)\,d\psi \quad \text{(intégrale de Poisson)}.$$

5. *Unicité de la solution.* — La dernière formule montre que les *maxima* et *minima* d'une fonction harmonique (dont les dérivées secondes sont continues (sont situés *sur le bord du contour* C. C'est un théorème capital dont nous donnerons une démonstration élémentaire.

Si donc une fonction de cette sorte *est nulle sur* C, elle est identiquement nulle dans l'aire C; d'où l'unicité de la solution.

Une remarque s'impose. Donner U sur C, c'est donner, par exemple,

$$U = f(s),$$

s étant l'arc de courbe, ou

$$U = f(t),$$

si l'x et l'y de C sont donnés en t.

Cette donnée ne doit offrir *aucune sorte d'indétermination*, même en un seul point, sinon le théorème ne vaut plus.

Stieltjes ([1]) donne un exemple d'une admirable simplicité. Soit

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z} = P + iQ.$$

Sur le cercle de rayon 1, on trouve

$$f(e^{i\theta}) = -i \tang \frac{\theta}{2};$$

$P = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$ est nul sur ce cercle.

C'est une fonction harmonique qui devrait être identiquement nulle dans l'aire. Or cela n'a pas lieu, parce que, au point $x = -1$, $y = 0$, P prend des valeurs dépendant du chemin suivi pour arriver à ce point.

Ainsi le théorème d'unicité exige que la donnée soit bien déterminée au voisinage intérieur du contour ([2]).

6. *Comparaison des fonctions harmoniques et des fonctions synectiques.* — Toutes nos formules sont identiques, au fond, à celle de Cauchy :

$$2i\pi f(z_0) = \int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Donc, de même que $f(z)$ est développable en série de Taylor, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont développables.

Si $f(z)$ est partout régulière et que son module ne croisse pas avec $|z|$, c'est une constante (Liouville). Même théorème pour $P(x, y)$.

([1]) *Correspondance d'Hermite et Stieltjes*, 2 vol.; Gauthier-Villars.

([2]) *Thèse de M. Painlevé* (*Ann. Fac. Toulouse*, 1887).

Une série de fonctions harmoniques $P_n(x, y)$, uniformément convergente dans une aire, a pour somme une fonction harmonique (Harnack). Même théorème pour une série de fonctions synectiques $f_n(z)$ (Weierstrass).

7. *Symétrie de la fonction de Green.* — Soit $G(a, b, x, y)$ la fonction de Green nulle sur le contour C et infinie en (a, b) intérieur à C. Prenons un second point intérieur à C, (a_1, b_1).

Appliquons la formule de Green aux deux fonctions $G(a, b, x, y)$, $G(a_1, b_1, x, y)$ et au contour formé par C avec un petit cercle γ de centre (a, b) et un petit cercle γ_1 de centre (a_1, b_1) : nous avons de suite

$$G(a, b, a_1, b_1) = G(a_1, b_1, a, b).$$

8. *Remarque sur l'unicité des solutions.* — On doit se méfier des généralisations superficielles. Soient les équations

$$(1) \qquad \delta u - k^2 u = 0 \qquad (k^2 \geqq 0),$$

$$(2) \qquad \delta u + k^2 u = 0 \qquad (k^2 > 0).$$

On donne u sur un contour fermé C.

Dans ces conditions, la solution de (1) est *déterminée*. Posons, avec M. Paraf (*Ann. de la Fac. de Toulouse*, t. VI),

$$u = (a^2 - x^2) v.$$

$a^2 - x^2$ étant *positif* dans la région (C), (1) devient

$$(a^2 - x^2)\,\delta v - 2x\frac{\partial v}{\partial x} - 2v - k^2(a^2 - x^2)\,v = 0.$$

Si, dans (C), v avait un maximum positif ou un minimum négatif, ceci donnerait

$$-A^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad +A^2 = 0.$$

Il y a contradiction. D'où l'*unicité*.

Pour (2) il n'en est pas ainsi. En effet, (2) admet la

solution

$$J_0(kr) = 1 - \frac{k^2 r^2}{(2)^2} + \frac{k^4 r^4}{(2.4)^2} - \frac{k^6 r^6}{(2.4.6)^2}, \qquad \ldots,$$
$$r^2 = x^2 + y^2;$$

or la fonction de Bessel a des racines réelles. Donc (2) admet des solutions *nulles* sur une circonférence et *non identiquement nulles*.

L'ÉQUATION INTÉGRALE DE M. FREDHOLM.

1. L'équation de M. Fredholm, si importante, en elle-même, doit être étudiée ici, à cause de son rôle dans les *Problèmes de Dirichlet* et dans maint problème de *Physique*.

L'équation intégrale *linéaire* est la suivante :

$$(1) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)\, ds = \psi(x).$$

$\psi(x)$ est donnée ainsi que $f(x, s)$, et nous chercherons l'expression de $\varphi(x)$ en regardant la quadrature, dans (1), *comme limite de somme.*

On peut écrire

$$\int_0^1 f(x, s)\varphi(s)\, ds = \lim_{n=\infty} \sum_{p=1}^{p=n} f\left(x, \frac{p}{n}\right) \varphi\left(\frac{p}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

L'équation (1) étant ainsi transformée, en regardant n comme *fini*, d'abord, écrivons que cette équation transformée est vérifiée pour les valeurs

$$x = x, \qquad x = \frac{1}{n}, \qquad \frac{2}{n}, \qquad \ldots, \qquad \frac{n}{n}.$$

D'où $(n+1)$ équations aux $(n+1)$ inconnues

$$\varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad \ldots, \quad \varphi\left(\frac{n}{n}\right).$$

Nous posons

$$\varphi\left(\frac{p}{n}\right) = \varphi_p, \qquad \psi\left(\frac{p}{n}\right) = b_p, \qquad \frac{\lambda}{n} = h,$$

$$f\left(x, \frac{p}{n}\right) = a_{xp}, \qquad f\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = a_{pq}.$$

Le système s'écrit alors

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) + h(a_{x1}\varphi_1 + a_{x2}\varphi_2 + \ldots + a_{xn}\varphi_n) = \psi(x), \\ \varphi_i \quad + h(a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \ldots + a_{in}\varphi_n) = b_i \end{array} \right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou bien encore

$$0 = \begin{vmatrix} 1 + ha_{11} & ha_{12} & \ldots & ha_{1n} & b_1 \\ ha_{21} & 1 + ha_{22} & \ldots & ha_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ha_{n1} & \ldots & \ldots & 1 + ha_{nn} & b_n \\ ha_{x1} & \ldots & \ldots & ha_{xn} & \psi(x) - \varphi(x) \end{vmatrix}.$$

D'où

$$(2) \qquad \psi(x) - \varphi(x) = \frac{-A_n}{B_n}.$$

2. Étudions ces déterminants A_n et B_n, que nous avons déjà développés :

$$B_n = \begin{vmatrix} 1 + ha_{11} & \ldots & ha_{1n} \\ ha_{21} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ha_{n1} & \ldots & 1 + ha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= 1 + h\sum a_{ii} + \frac{h^2}{2}\sum{}' \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{h^3}{\underline{|3}}\sum \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \ldots.$$

Et, comme $h = \frac{\lambda}{n}$, nous avons

$$B_n = 1 + \frac{\lambda}{1}\sum f\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2}\sum \begin{vmatrix} f\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right) & f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \\ f\left(\frac{j}{n}, \frac{i}{n}\right) & f\left(\frac{j}{n}, \frac{j}{n}\right) \end{vmatrix} \frac{1}{n^2} + \ldots.$$

Lorsque n devient infini, *chaque somme* a une limite, qui est une intégrale, la première

$$\int_0^1 f(x_1, x_1)\,dx_1,$$

la seconde

$$\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} f(x_1, x_1) & f(x_1, x_2) \\ f(x_2, x_1) & f(x_2, x_2) \end{vmatrix} dx_1\,dx_2.$$

Etc.

D'où une série en λ. *Si elle converge,* nous écrirons

$$\lim_{n=\infty} B_n = D_f(\lambda).$$

Étudions le numérateur. A_n est une somme de termes de la forme

$$\sum h^p \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & a_{\alpha_1\alpha_p} & b_{\alpha_1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{\alpha_p\alpha_1} & \dots & a_{\alpha_p\alpha_p} & b_{\alpha_p} \\ a_{x\alpha_1} & \dots & a_{x\alpha_p} & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut passer à la limite, pour $n=\infty$, pour *chaque somme :* nous obtenons des intégrales multiples. Nous représenterons $f(x_p, x_q)$ par

$$(x_p x_q)$$

et

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_p$$

par

$$\underset{1,2,3,\dots,p}{S}$$

Le terme de rang p, dans $\lim A_n$ (nous admettons, pour l'instant, la convergence de la série en λ), sera

$$u_p = \frac{\lambda^p}{p!} \underset{1,2,3,\dots,p}{S} \begin{vmatrix} (x_1x_1) & \dots & (x_1x_p) & \psi(x_1) \\ (x_2x_1) & \dots & (x_2x_p) & \psi(x_2) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ (x_px_1) & \dots & (x_px_p) & \psi(x_p) \\ (xx_1) & \dots & (xx_p) & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Une REMARQUE CAPITALE est la suivante :

Développons le déterminant par rapport à la dernière colonne et intégrons ; *nous obtenons p termes* identiques.

Écrivons le premier :

$$T_1 = 1(-1)^p \int_0^1 \psi(x_1)\,dx_1 \times \underset{2,3,\ldots,p}{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} (x_2x_1) & (x_2x_2) & \ldots & (x_2x_p) \\ (x_3x_1) & (x_3x_2) & \ldots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ (x_px_1) & (x_px_2) & \ldots & (x_px_p) \\ (xx_1) & (xx_2) & \ldots & (xx_p) \end{vmatrix}.$$

Écrivons le second :

$$T_2 = -1(-1)^p \int_0^1 \psi(x_2)\,dx_2 \times \underset{1,3,4,\ldots,p}{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} (x_1x_1) & (x_1x_2) & \ldots & (x_1x_p) \\ (x_3x_1) & (x_3x_2) & \ldots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ldots & \\ (x_px_1) & (x_px_2) & \ldots & \\ (xx_1) & (xx_2) & \ldots & \end{vmatrix}.$$

Dans le terme T_1, faisons $x_2 = \xi_1$, puis $x_1 = \xi_2$; alors T_1 devient

$$(-1)^p \int_0^1 \psi(\xi_2)\,d\xi_2 \underset{1,3,\ldots,p}{\mathrm{S}} \Delta$$

et Δ est le déterminant de T_2, au signe près : deux colonnes sont échangées et x_1 est remplacé par ξ_1, x_2 par ξ_2.

Deux signes — se détruisent, le nom de la variable d'intégration ne signifie rien :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy.$$

Donc $T_1 = T_2$.

Faisons remonter la dernière ligne au premier rang :

$$u_p = -p \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \psi(s)\, ds \times \underset{2, 3, 4, \dots, p}{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} (xs) & (xx_2) & \dots & (xx_p) \\ (x_2 s) & (x_2 x_2) & \dots & (x_2 x_p) \\ (x_3 s) & (x_3 x_2) & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ (x_p s) & (x_p x_2) & \dots & (x_p x_p) \end{vmatrix}.$$

On peut enfin remplacer

$$(x_2 x_3 \dots x_p)$$

par

$$(x_1 x_2 \dots x_{p-1}).$$

D'où le terme général

$$-\lambda \int_0^1 \psi(s)\, ds \frac{\lambda^{p-1}}{(p-1)!} \times \underset{1, 2, \dots, (p-1)}{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} (xs) & (xx_1) & \dots & (xx_{p-1}) \\ (x_1 s) & (x_1 x_1) & \dots & \dots\dots \\ (x_2 s) & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ (x_{p-1} s) & (x_{p-1} x_1) & \dots & (x_{p-1} x_{p-1}) \end{vmatrix}.$$

4. Nous écrirons donc, s'il y a convergence,

$$\lim_{n=\infty} A_n = -\lambda \int_0^1 D_f(\lambda, x, s)\, \psi(s)\, ds,$$

et nous aurons

$$\varphi(x) = \psi(x) - \frac{\lambda \int_0^1 D_f(\lambda, x, s)\, \psi(s)\, ds}{D_f(\lambda)}.$$

Telle est la voie par laquelle M. Hilbert [1], dans ses

---

[1] M. D. HILBERT a obtenu de très beaux résultats dans cette théorie. *Voir* ses travaux, cités plus loin, et ceux de MM. OTTO TOEPLITZ et ERNST HELLINGER, sur les formes quadratiques à une infinité de variables.
Ceci se rattache aux équations linéaires à une infinité d'inconnues

remarquables Travaux, arrive à la célèbre formule de M. Fredholm.

5. *Convergence des séries.* — Il faut voir que $D(\lambda)$ et $D(\lambda, x, s)$ convergent. Or, ce sont des *fonctions entières* de λ, comme on le voit aisément par le théorème de M. *Hadamard* sur les déterminants, et en employant la formule de *Stirling*. *La solution est donc méromorphe* en λ.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE M. FREDHOLM.

Donnons quelques indications sur les principaux résultats du célèbre Mémoire de M. Fredholm. Le lecteur reconstituera les analyses que nous esquissons.

1. Nous posons, d'après ce qui précède,

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f(x_n, y_1) & \ldots\ldots\ldots & \ldots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{\lfloor n} \underset{1,2,3,\ldots,n}{S} f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix},$$

$$D_1\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = f(\xi, \eta) + \sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{\lfloor n} \underset{1,2,3,\ldots,n}{S} f\begin{pmatrix} \xi, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \eta, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}.$$

Développant le terme général de D_1, nous avons n termes identiques, et un autre :

$$f(\xi, \eta) \frac{\lambda^n}{\lfloor n} \underset{1,2,\ldots,n}{S} f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

$$- n \frac{\lambda^n}{\lfloor n} \int_0^1 f(\xi, \tau)\, d\tau \underset{1,2,\ldots,(n-1)}{S} f\begin{pmatrix} \tau, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ \eta, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(Travaux de MM. Hill, Poincaré, H. von Koch. — E. Schmidt, *Circ. di Palermo*, 1908) et aux fonctions implicites en nombre infini : Note de l'auteur, (*Soc. math. de France*, 1908). — Nous supposons f *fini;* M. Fredholm et M. Hilbert traitent aussi le cas où *le noyau* $f(x, s)$ est infini, dans certaines conditions.

D'où la formule

$$(F_1) \qquad D_1\binom{\xi}{\eta} = D \times f(\xi, \eta) - \lambda \int_0^1 f(\xi, \tau)\, D_1\binom{\tau}{\eta}\, d\tau.$$

En développant le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, au lieu de la première ligne, nous avons la formule équivalente

$$(F_2) \qquad D_1\binom{\xi}{\eta} = D \times f(\xi, \eta) - \lambda \int_0^1 f(\tau, \eta)\, D_1\binom{\xi}{\tau}\, d\tau.$$

La comparaison donne

$$(F_3) \qquad 0 = \int_0^1 \left[f(\xi, \tau)\, D_1\binom{\tau}{\eta} - f(\tau, \eta)\, D_1\binom{\xi}{\tau} \right] d\tau.$$

2. Ceci permet de *vérifier* la solution obtenue, par une sorte d'*itération*. On écrit

$$(1) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int_0^1 \frac{D_1\binom{x}{s}}{D}\, \psi(s)\, ds,$$

et, sous le signe,

$$(2) \qquad \varphi(s) = \psi(s) - \lambda \int_0^1 \frac{D_1\binom{x}{t}}{D}\, \psi(t)\, dt.$$

En vertu de (F), (1) se réduit à l'identité

$$D \int_0^1 f(x, s)\, \psi(s)\, ds = D \int_0^1 f(x, t)\, \psi(t)\, dt.$$

Nous avons supposé $D \neq 0$.

3. Soit λ_0 une racine de la fonction entière D. M. Fredholm a obtenu la forme de la dérivée $\frac{d^n D}{d\lambda^n}$ en introduisant de nouvelles séries :

$$D_n\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}$$
$$+ \sum_1^\infty \frac{\lambda^p}{\underline{|p}} \underset{1,2,\ldots,p}{S} f\begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n, x_1, \ldots, x_p \\ \eta_1, \ldots, \eta_n, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix}.$$

On a, de suite,

$$\frac{d^n D}{d\lambda^n} = \underset{1,2,\ldots,n}{\mathrm{S}} D_n\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}.$$

Développant le déterminant du terme général, dans D_n, suivant la première *ligne*, et intégrant, avec les mêmes remarques, M. Fredholm obtient

$$(\Phi_1)\left\{\begin{aligned} & D_n\begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} + \lambda\int_0^1 f(\xi_1, \tau) D_n\begin{pmatrix} \tau, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} d\tau \\ & = f(\xi_1, \eta_1) D_{n-1}\begin{pmatrix} \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} \\ & \quad - f(\xi_1, \eta_2) D_{n-1}\begin{pmatrix} \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_3, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} + \ldots \\ & \quad + (-1)^{n-1} f(\xi_1, \eta_n) D_{n-1}\begin{pmatrix} \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Intégrant encore, en développant le déterminant suivant les termes de la première *colonne*, on a, de même,

$$(\Phi_2)\left\{\begin{aligned} & D_n\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} + \lambda\int_0^1 f(\tau, \eta_1) D_n\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \tau, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} d\tau \\ & = f(\xi_1, \eta_1) D_{n-1}\begin{pmatrix} \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} \\ & \quad - f(\xi_2, \eta_1) D_{n-1}\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} \\ & \quad + \ldots - \ldots, \end{aligned}\right.$$

ou bien, avec une notation nouvelle,

$$(\Phi_3)\left\{\begin{aligned} & D_{n+1}\begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y, \eta_1, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} + \lambda\int_0^1 f(\tau, y) D_{n+1}\begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \tau, \eta_1, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} d\tau \\ & = f(x, y) D_n\begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} \\ & \quad - f(\xi_1, y) D_n\begin{pmatrix} x, \xi_2, \ldots \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \quad + (-1)^n f(\xi_n, y) D_n\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, x \\ \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Si $D(\lambda_0) = 0$, λ_0 est une racine n-uple, si pour $\lambda = \lambda_0$ les fonctions D_p s'annulent, p étant $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

D'après l'expression de la dérivée de $D(\lambda)$, on voit même que λ_0 est racine, *au moins d'ordre n*, dans ce cas.

Dans ces conditions, M. Fredholm prouve :

1° Que l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x,y)\,\varphi(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

a n solutions linéairement indépendantes;

2° Que l'équation donnée

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x,y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x) \tag{4}$$

est résoluble, si n conditions sont remplies.

4. λ_0 est donc tel que, pour cette valeur,

$$D^0 \equiv 0 \equiv D_1^0 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}^0.$$

La formule (Φ_1) montre que

$$D_n^0\begin{pmatrix} x, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}$$

est une solution de l'équation homogène. Les développements analogues à ceux donnant (Φ_1) donnent aussi bien la solution

$$-D_n^0\begin{pmatrix} \xi_1, x, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}$$

(le signe est alterné, pour la symétrie). Nous pouvons aussi bien diviser par

$$D_n^0\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix} \equiv \Delta^0,$$

et nous avons n solutions que nous représentons par L_1,

$L_2, \ldots, L_n$:

$$L_1(x) = \frac{1}{\Delta^0} D_n^0 \begin{pmatrix} x, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n \end{pmatrix},$$

..................................,

$$L_n(x) = \frac{1}{\Delta^0} (-1)^{n-1} D_n^0 \begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, x \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n \end{pmatrix}.$$

5. Montrons que *toute solution de* (3) *est une combinaison linéaire, à coefficients constants, des solutions* L. — (Nous suivons exactement l'exposition de M. E. Picard, *Cours de la Sorbonne,* 1906.)

Établissons un lemme :

Soit (3_1) *l'équation* (3) *où* $f(x, y)$ *est remplacé, g étant quelconque, par*

$$(5)\quad F(x, y) = f(x, y) + g(x, y) + \lambda_0 \int_0^1 g(x, \tau) f(\tau, y)\, d\tau.$$

Toute solution de (3) *satisfait à* (3_1). — C'est une vérification immédiate; on est ramené à l'identité

$$\int\int g(x, \tau) f(\tau, y)\, d\tau\, dy \equiv \int\int g(x, y) f(y, \tau)\, dy\, d\tau.$$

Donc, au lieu de (3) nous écrivons

$$(6)\qquad \varphi(x) = -\lambda_0 \int_0^1 F(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Or, pour pouvoir employer la formule (Φ_3), prenons

$$g(x, y) = -\frac{1}{\Delta^0} D_{n+1}^0 \begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y, \eta_1, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons, d'après (Φ_3), le second membre de (5), d'où

$$(7)\qquad F(x, y) = \sum_1^n f(\xi_i, y) L_i(x).$$

Portons la valeur (7) dans (6),

$$(8)\qquad \varphi(x) = \sum_1^n A_i L_i;$$

A_i est indépendant de x. Nous renvoyons à M. Fredholm pour la preuve de l'indépendance des solutions L.

Étudions maintenant l'équation (4).

6. *Conditions relatives à un pôle* λ_0 *de la solution primitive.* — (4) peut avoir une solution, si n conditions sont remplies. (3) étant résolu, nous avons donc une *infinité* de solutions, pour (4), s'il y en a une.

Écrivons les équations

$$(\text{III})\qquad g(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, y)\, g(y)\, dy = 0,$$

$$(\text{III}_1)\qquad h(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(y, x)\, h(y)\, dy = 0.$$

Les D_p sont les mêmes; donc on a les mêmes pôles λ_0 et le même nombre de solutions; soient L celles de (III) et M celles de (III_1).

L'équation (4) donne

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \varphi(x)\, M_i(x)\, dx + \lambda_0 \int\int f(x, y)\, \varphi(y) M_i(x)\, dx\, dy \\ &\quad = \int_0^1 M_i(x)\, \psi(x)\, dx. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre est *nul*, d'après (III_1).

Donc on doit avoir

$$(10)\qquad 0 = a_i \equiv \int_0^1 M_i(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Ce sont les CONDITIONS.

7. *Si elles sont remplies on a la solution*

$$(11)\qquad \varphi(x) = \psi(x) + \lambda_0 \int_0^1 g(x, \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau,$$

g ayant été défini précédemment :

$$g(x, \tau) = -\frac{1}{\Delta^0} D^0_{n+1}\begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \tau, \eta_1, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}.$$

Faisons la vérification, en portant dans (4) la valeur (11). Il vient à vérifier

$$(12) \qquad 0 = \int_0^1 \psi(y) \mathrm{T}\, dy,$$

$$\mathrm{T} \equiv g(x, y) + f(x, y) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, \tau)\, g(\tau, y)\, d\tau.$$

Reportons-nous à (III), où nous remplaçons $f(x, y)$ par $f_1(x, y)$ [qui sera *identique* à $f(y, x)$].

Nous avons donc les solutions $L_i^1(x)$ [qui deviendront identiques aux $M_i(x)$].

Or (7) donne, g_1 étant quelconque,

$$(13) \quad \begin{cases} F_1(x, y) = f_1(x, y) + g_1(x, y) + \lambda_0 \int_0^1 g_1(x, \tau) f_1(\tau, y)\, d\tau \\ \qquad = \sum_1^n f_1(\xi_i, y) L_i^1(x). \end{cases}$$

Si maintenant nous faisons

$$f_1(x, y) \equiv f(y, x), \qquad g_1(x, y) \equiv g(y, x),$$

(13) deviendra

$$\sum_1^n f_1(\xi_i, y) M_i(x)$$
$$\equiv f(y, x) + g(y, x) + \lambda_0 \int_0^1 g(\tau, x) f(y, \tau)\, d\tau.$$

On peut échanger x et y, d'où

$$\sum^n f_1(\xi_i, x) M_i(y) \equiv \mathrm{T}.$$

Alors, a_i étant nul, il est immédiat que (12) est *vérifié*.

Tel est le résumé des principaux résultats de M. Fredholm.

Disons un mot des applications.

APPLICATIONS.

PROBLÈMES DE DIRICHLET.

On se rend compte que ces équations se ramènent aux équations intégrales.

Il suffit de regarder les formules des potentiels.

1. *Problème de Dirichlet, intérieur.* — On a

$$W_i = W_0 + \pi\nu_0;$$

W_i est *connu*, l'inconnue est $\nu(s)$, ν est donné par une équation de Fredholm, d'où la solution, par un potentiel de double couche, à l'intérieur du contour fermé C.

Nous avons l'équation de la forme (4), avec $\lambda = 1$:

$$\nu(s) + \lambda \int_0^L \nu(\sigma) \frac{1}{\pi} \frac{\cos\varphi}{r} d\sigma = \frac{\psi(s)}{\pi};$$

L est la longueur du contour, s un point *fixe*, σ un point *mobile*, du contour. Il faut qu'on ait $D(1) \neq 0$.

Mais, si l'on avait $D(1) = 0$, l'équation

$$\nu(s) + \int_0^L \nu(\sigma) \frac{1}{\pi} \frac{\cos\varphi}{r} d\sigma = 0$$

aurait une solution *non nulle*.

On peut prouver l'impossibilité de ceci, donc l'impossibilité que le point *un* soit un pôle λ_0.

(φ est l'angle de la normale extérieure au point σ avec le rayon r qui va du point s au point σ.)

Il suffit que le contour portant la donnée ait un *rayon de courbure lipschitzien* pour que le problème soit aussi

immédiatement résoluble (T. LALESCO, *Bull. des Sciences math.*, 1907).

Par des représentations conformes, M. Darboux, dans son Cours (1907), a résolu le problème pour des contours présentant certaines pointes..

C'est un résultat très important.

2. *Problème de Neumann, extérieur.* — $\left(\frac{dV}{dn}\right)_e$ est *connu;* l'inconnue $\mu(s)$ est donnée par une équation de Fredholm, d'après la relation

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_e = \int \mu \frac{\cos\psi}{r} d\sigma + \pi\mu_0.$$

La solution est un potentiel de simple couche. Même impossibilité, d'après les théorèmes classiques, que l'équation sans second membre soit résoluble. Donc ce problème extérieur ($\lambda = 1$) est résoluble.

[ψ est l'angle de la normale extérieure au point s avec le rayon qui va du point s, fixe, au point σ, mobile ([1]).]

L'équation est

$$\mu(s) + \lambda \int_0^L \mu(\sigma) \frac{\cos\psi}{r} \frac{1}{\pi} d\sigma = \frac{\psi(s)}{\pi}.$$

Problème extérieur : $\lambda = 1$.

Problème intérieur : $\lambda = -1$.

([1]) Donc, $\cos\varphi$ et $\cos\psi$ sont deux fonctions de la forme $f(s, \sigma)$ et $f(\sigma, s)$. D'où *la condition connue,* pour le *problème intérieur de Neumann,*

$$\int_C \frac{dV}{dn} ds = 0.$$

Mais il y a toute une *discussion délicate* sur la *réalité* et la *multiplicité* de la racine λ_0, discussion qui exige la connaissance des *travaux classiques* sur l'équation de Laplace, en particulier de ceux de M. Poincaré (*Circolo di Palermo,* 1894; *Acta mathematica,* t. XX).

Nous n'avons pas à rappeler ici les différences entre les problèmes de Dirichlet pour le *plan* et pour l'*espace* (travaux de lord Kelvin, etc.).

Nous renvoyons aux Ouvrages de M. Picard et à une Note finale de ce Livre.

3. Pour le problème de Dirichlet, *extérieur*, ou le problème de Neumann, *intérieur*, il y a une solution de l'équation sans second membre, et l'on retrouve la condition de possibilité connue. Nous ne pouvons que renvoyer aux travaux, déjà nombreux, sur ces sujets ([1]).

Indiquons simplement l'application aux équations différentielles.

4. *Équations différentielles linéaires.* — Une équation différentielle d'ordre n peut être intégrée avec les conditions de Cauchy : on donne

$$y(x_0),\quad y^1(x_0),\quad \ldots,\quad y^{n-1}(x_0),$$

ou bien encore, on peut donner n points de l'intégrale

$$y(x_1),\quad y(x_2),\quad \ldots,\quad y(x_n).$$

Dans ce cas, nous avons une *équation de M. Fredholm;* on le voit facilement.

Soit

$$\mathrm{E} \equiv p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_n y.$$

L'adjointe $\mathcal{E}$ sera

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\equiv (-1)^{n-1}(p_1 z)^{n-1} + (-1)^{n-2}(p_2 z)^{n-2} + \ldots + p_n z\\ &\equiv \mathrm{A}_1 z^{(n-1)} + \mathrm{A}_2 z^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{A}_n z.\end{aligned}$$

Soit a_h la fonction $\mathrm{A}_h(t)$, A_h étant $\mathrm{A}_h(x)$. Soit

$$z = \frac{(x-t)^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

([1]) Citons : I. Fredholm, *Acta mathematica*, t. XXVII. — D. Hilbert, *Nachrichten zu Göttingen*, 1904-1906. — E. Picard, *Annales Éc. Normale*, 1906. — J. Plemelj, *Monatshefte für Math. und Phys.*, t. XV et XVIII. — Erhard Schmidt, *Mathem. Annalen*, t. LXIII et LXIV. — On consultera aussi le résumé du Cours de M. Picard, 1906, dans les *Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1906, et la Thèse de l'Université de Paris de M. Bryon Heywood (Gauthier-Villars, 1908). — Il faut noter que MM. Hilbert et Schmidt donnent des solutions entièrement nouvelles de l'équation de Fredholm.

Nous posons

$$\Delta(x, t) = (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^{n-2} a_2(x-t) + \ldots + a_n \frac{(x-t)^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

Soit $Q_{n-1}(x)$ un polynome en x, de degré $(n-1)$.

Écrivons l'*équation intégrale*

$$(1) \qquad Q_{n-1}(x) = y(x) + \lambda \int_a^x \Delta(x, t) y(t)\, dt.$$

En dérivant n fois, on a

$$o = y^n(x) + \lambda[(-1)^{n-1}(A_1 y)^{n-1} + \ldots + A_n y].$$

Le terme entre crochets est l'*adjointe* de $\mathcal{E}$; donc c'est identiquement E.

Donc (1) équivaut à (2),

$$(2) \qquad y^n + \lambda(p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_n y) = o,$$

et nous déterminons [1] le polynome Q par la condition, par exemple, que y s'annule pour $x = a, a_2, \ldots, a_n$. Nous aurons encore une équation du type (1).

Note. — L'extension au cas où l'inconnue est

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

avec une intégrale p-uple, est immédiate : solution méromorphe en λ; en un pôle λ_0, solution de l'équation homogène et, avec des conditions, de l'équation donnée, à second membre.

---

(1) Bateman, *Bull. des Sc. math.*, 1906. — M. Mason, *Mathematische Annalen*, t. LVIII. — D. Hilbert, *loc. cit.* — Sur les questions de ce genre, *voir* les beaux travaux de M. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 2e édition (*sous presse*), par les approximations successives.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DES TYPES HYPERBOLIQUE ET PARABOLIQUE.

Le type elliptique correspond aux caractéristiques *imaginaires,* le type hyperbolique aux caractéristiques *réelles,* le type parabolique aux caractéristiques *confondues.*

Le premier type a été étudié précédemment, pour l'équation la plus célèbre, celle de Laplace.

Nous étudierons quelques cas hyperboliques et dirons un mot du cas parabolique. D'abord quelques remarques sur les théorèmes généraux d'existence et sur les *caractéristiques,* multiplicités d'exception, relativement à ces théorèmes généraux ; sur la *partie finie* d'une intégrale ; sur la notion d'*adjointe ;* un *problème fonctionnel,* etc.

I. — Sur les théorèmes d'existence.

Le *principe de Dirichlet* est là pour nous en avertir, et nous avons bien vu que les solutions des équations différentielles ou aux dérivées partielles peuvent être formées avec des *conditions aux limites* très variées.

Revenant au théorème de Cauchy, faisons une remarque pour le cas où les fonctions *cessent d'être holomorphes.*

Le cas le plus simple est celui de Briot et Bouquet :

$$xy' = ax + by + \dots.$$

Si b n'est pas entier et positif, il y a une solution holomorphe à l'origine. On le voit en écrivant

$$xy' - by = ax + \varphi(x, y),$$

et en comparant y à la *fonction implicite* z donnée par

$$\omega z = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right)} - M - \frac{z}{r};$$

ω est le minimum de $|n-b|$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Le cas le plus général

$$x^m y' = ax + by + \ldots$$

donne lieu à beaucoup de distinctions et de discussions difficiles ([1]).

M. Goursat a étendu l'application du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles, alors que, précédemment, on employait l'artifice du jacobien, pour prouver le théorème de Cauchy.

D'ailleurs, le *Calcul des Limites* donne aussi bien de nouveaux types de théorèmes d'existence. Soit

$$(1) \qquad s = ap + bq + cz + f.$$

On peut donner z seul, mais sur Ox et sur Oy.

Supposons z *nul* sur les axes, ce qui ne change pas la forme de l'équation, et prenons d'abord

$$(2) \qquad s = cz;$$

c a pour majorante

$$G = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R}\right)}.$$

Soit r le plus petit des deux nombres R, $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

Prenons pour majorante

$$G_1 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r}\right)}.$$

([1]) E. PICARD, *Traité*, t. III, 2e édition (*sous presse*).

La fonction $u = \dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r}\right)}$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = G_1 u.$$

Nous avons donc une solution, holomorphe autour de l'origine.

En posant $z = uv$, on ramène l'équation (1) à deux équations de la forme (2).

Les théorèmes les plus généraux, dans cet ordre d'idées, sont dus à M. Goursat et à M. Riquier (¹).

Remarque. — Il faut bien veiller à ce que toutes les conditions soient remplies, dans l'application du théorème de Cauchy.

Nous donnerons l'exemple suivant, dû à Mme de Kowalesky (²). Soit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Nous pouvons, sur Ox, donner

$$z = f_1(x) = \sum a_n x^n, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f_2(x) = \sum b_n x^n,$$

$$(1) \qquad z(x, y) = f_1(x) + y f_2(x) + \ldots + \frac{y^{2n}}{\lfloor 2n} f_1^n(x) + \frac{y^{2n+1}}{\lfloor 2n+1} f_2^n(x) + \ldots.$$

Telle est la solution, convergente. Imaginons que l'équation donnée est du premier ordre en x et donnons-nous, sur Oy,

$$z = \varphi(y),$$

$$(2) \qquad z(x, y) = \varphi(y) + x\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n}\frac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} + \ldots.$$

(¹) *Voir* E. GOURSAT, *Soc. math. de France*, 1906. — *Leçons sur les équations aux dérivées partielles*, 3 vol. (Hermann).

(²) *Thèse* (*Journal de Crelle*, t. 80).

Ceci n'est une solution que si φ vérifie certaines conditions. Soit une valeur y_0; si autour de ce point $\varphi(y)$ a un rayon de convergence *fini,* il est impossible que (2) converge $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\text{ croît avec } n\right)$.

Prenons (1) et faisons $x = 0$:

$$(1')\qquad z(0, y) = \sum\left(\frac{\underline{|n}}{\underline{|2n}}\, a_n y^{2n} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|2n+1}}\, b_n y^{2n+1}\right).$$

Et, comme on a

$$|a_n| \quad\text{et}\quad |b_n| < \frac{M}{R^n},$$

$z(0, y)$ est une fonction *entière*. Donc $\varphi(y)$ doit être *entière*. Soit donc donné

$$\varphi(y) = \sum(A_n y^{2n} + B_n y^{2n+1})$$

entière :

$$\frac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} = \underline{|2n}\,A_n + \frac{\underline{|2n+2}}{\underline{|2}}\,A_{n+1}y^2 + \ldots + \frac{\underline{|2n+2p}}{\underline{|2p}}\,A_{n+p}y^{2p} + \ldots$$
$$+ \underline{|2n+1}\,B_n y + \ldots.$$

Si $|A_n|$ et $|B_n|$ sont moindres que $\frac{\underline{|n}}{\underline{|2n}}\frac{M}{R^n}$ (nouvelle condition), (2) convergera.

II. — Sur l'hypergéométrie.

On a souvent besoin de parler le langage géométrique, alors même que le nombre des variables est supérieur à *trois*. Il n'y a là, dans l'Hypergéométrie, aucun mystère pour le mathématicien.

Par exemple, on dit que, dans l'espace à n dimensions,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

représente une *surface* et une intégrale n-uple un *volume*.

Il n'y a là qu'une *langue commode* qui aide l'imagination et favorise la découverte. Il y a là la source d'analogies fécondes, mais aussi, parfois, trompeuses. Il faut donc constamment faire suivre l'image de la construction analytique.

Prenons un exemple. Soit le cône

$$x^2 + y^2 = z^2;$$

il découpe *trois* régions, l'une *extérieure*, qui ne contient pas l'axe Oz, et deux *intérieures*, l'une à cote positive, l'autre à cote négative. Il en est de même pour les cônes

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 = t^2$$

dans l'espace $(p+1)$-uple.

Au contraire, dans l'espace $(p+1)$-uple, les cônes

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 = y_1^2 + \ldots + y_q^2$$

ne découpent que *deux* régions (¹).

Pour une surface, quel que soit n, on sait qu'il faut, en certains cas, examiner si elle a *un seul côté* (²). Ceci ne dépend pas de n.

Faisons quelques extensions immédiates.

Soit une surface S

$$x_1 = \xi_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad x_n = \xi_n$$

et une surface Σ

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Posons

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \Psi(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Pour que S et Σ aient, en un point, un contact d'ordre n, il faut et il suffit qu'en ce point Ψ et toutes ses dérivées d'ordre 1, 2, ..., n s'annulent.

(¹) J. COULON, *Thèse* (Hermann, 1902).

(²) E. PICARD, *Traité*, t. I, p. 124

D'où le plan tangent à S, soit

$$A_1(X_1-x_1)+A_2(X_2-x_2)+\ldots+A_n(X_n-x_n)=0,$$

$$A_1=J_1=\frac{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}, \quad \ldots.$$

Les *cosinus* de la normale à S seront

$$\alpha_k=\frac{J_k}{\sqrt{\Sigma J_h^2}}=\frac{J_k}{J_0}.$$

L'élément de surface sera

$$d\omega=\sqrt{\Sigma J_h^2}\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}.$$

La formule de Green subsiste.

Il n'y a rien à changer à la théorie du changement de variables dans les intégrales ([1]).

Mais voici une question nouvelle.

Dans l'espace à 3 dimensions, nous avons :

Variété à	1	dimension	= ligne,
»	2	dimensions	= surface,
»	3	»	= volume.

Avec 4 dimensions, nous avons du nouveau, savoir les *variétés à 2 dimensions*, qui ne sont ni lignes, ni surfaces.

M. Henri Poincaré définit leur *aire* de la manière suivante ([2]) :

Plaçons-nous dans E_3 (espace 3-uple).

Nous pouvons définir le ds d'une courbe C en regardant la surface-canal, enveloppe de sphères de rayon ε ayant leurs centres sur C.

L'élément de k (ABA'B'), situé entre deux sections normales PQ, P'Q', a pour mesure

$$AB \times AA' = d\omega, \qquad AB=\varepsilon\, d\theta, \qquad AA'=ds,$$

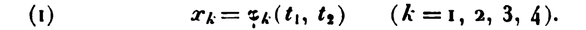
([1]) *Cours* de M. Jordan et de M. Baire.

([2]) *Acta mathematica*, t. XXII, p. 143.

d'où

$$ds = \frac{d\omega}{\varepsilon\, d\theta}.$$

Faisons de même, dans E_4, pour obtenir la mesure de l'élément de V_2, variété donnée par



$$(1) \qquad x_k = \varphi_k(t_1, t_2) \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Fig. 17.

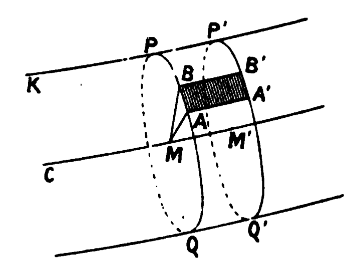
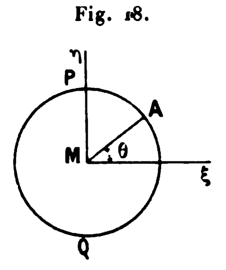


Fig. 18.



Les sphères ayant leur centre sur V_2 ont pour équation

$$(2) \qquad \sum (x_k - \varphi_k)^2 = \varepsilon^2.$$

Pour avoir l'enveloppe, décrivons en t_1 et t_2

$$(3) \qquad \sum (x_k - \varphi_k)\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_h} = 0.$$

Dans E_3 nous pouvons déterminer la position du point A, sur l'enveloppe, par l'angle θ rapporté à deux directions rectangulaires ξ, η de la section PQ, liées à cette section; ξ a pour cosinus α_1, α_2, α_3, et η, β_1, β_2, β_3.

Dans E_4, posons, de même,

$$(4) \qquad x_k - \varphi_k = \alpha_k \varepsilon \cos\theta + \beta_k \varepsilon \sin\theta,$$

$$(5) \qquad \sum \alpha_k^2 = 1 = \sum \beta_k^2, \qquad \sum \alpha_k \beta_k = 0;$$

(2) et (3) sont satisfaites par les formules (4), quel que soit θ, si l'on a

$$(6) \qquad \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_h} = \sum \beta_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_h} = 0.$$

La droite analogue à MA est bien la normale à k dont les cosinus sont

$$\frac{x_k - \varphi_k}{\varepsilon}.$$

En effet :

1° La somme des carrés est *un*;

2° $$\sum (x_k - \varphi_k) \frac{\partial x_k}{\partial \theta} = 0;$$

3° $$\sum (x_k - \varphi_k) \frac{\partial x_k}{\partial t_h} = 0.$$

Il suffit de dériver (2) en t_h et en θ et d'ajouter (3).

Nous avons donc, d'après les notations précédentes, les éléments J_k, J_0 de la surface k,

$$\frac{x_1 - \varphi_1}{\varepsilon} = \frac{J_1}{J_0} = \alpha_1 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta,$$

$$\frac{J_1^2}{J_0} = J_1(\alpha_1\gamma + \beta_1\sigma) \qquad (\gamma = \cos\theta,\ \sigma = \sin\theta)$$

ou bien

$$J_0 = \sum J_k(\alpha_k\gamma + \beta_k\sigma),$$

ou bien encore J_0 est un déterminant :

$$J_0 = \left\| \frac{\partial x_k}{\partial t_1} \quad \frac{\partial x_k}{\partial t_2} \quad \frac{\partial x_k}{\partial \theta} \quad \alpha_k\gamma + \beta_k\sigma \right\|.$$

Or $\frac{\partial}{\partial t_h}(x_k - \varphi_k)$ contient ε en facteur.

Comme nous prendrons ε infiniment petit, nous pouvons ici remplacer $\frac{\partial x_k}{\partial t_h}$ par $\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_h}$ et écrire

$$J_0 = \left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_1} \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_2} \quad \varepsilon(-\alpha_k\sigma + \beta_k\gamma) \quad \alpha_k\gamma + \beta_k\sigma \right\|.$$

C'est une somme de quatre déterminants, dont deux sont nuls, et, comme $\sigma^2 + \gamma^2 = 1$, il reste

$$J_0 = \varepsilon \left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_1} \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_2} \quad \beta_k \quad \alpha_k \right\|.$$

Formons J_0^2; c'est un déterminant qui, d'après les rela-

tions (5), (6), est égal à une somme de carrés de mineurs soit

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_4}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_4}{\partial t_2} \end{vmatrix};$$

$$J_0^2 = \varepsilon^2 \sum \Delta_{mp}^2.$$

Donc J_0 est connu, et nous écrirons

$$J_0 = \varepsilon\, \Delta_0.$$

L'élément d'aire de k étant $\varepsilon \Delta_0\, dt_1\, dt_2\, d\theta$, celui de V_2 sera

$$\Delta_0\, dt_1\, dt_2.$$

III. — Sur les caractéristiques.

D'une manière générale, ce sont les variétés *exceptionnelles* relativement au théorème d'existence de Cauchy.

Prenons le cas le plus simple, les équations *linéaires*.

Équation d'ordre n à deux variables :

$$(1) \qquad A_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\, \partial y} + \ldots + A_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \Phi,$$

Φ ne contenant que des dérivées d'ordre moindre que n.

Sur une courbe C, on donne

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}$$

ou

$$z, \quad p_{10}, \quad p_{01}, \quad p_{20}, \quad \ldots, \quad p_{0\,n-1}.$$

Pour obtenir les dérivées d'ordre n, écrivons

$$\begin{cases} dp_{n-1\,0} = p_{n0}\, dx + p_{n-1\,1}\, dy, \\ dp_{n-2\,1} = p_{n-1\,1}\, dx + p_{n-2\,2}\, dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dp_{0\,n-1} = p_{1\,n-1}\, dx + p_{0\,n}\, dy. \end{cases}$$

Le calcul est possible, à moins que Δ ne soit nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & & 1 & \lambda \\ A_0 & A_1 & & & & A_n \end{vmatrix} = (-1)^n [A_0\lambda^n - A_1\lambda^{n-1} - \dots + (-1)^n A_n],$$

$$\lambda = \frac{dy}{dx}.$$

En chaque point nous avons n courbes, correspondant aux racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ce sont les *caractéristiques*.

Or, on vérifie facilement que l'opération

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{n-1} \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

reproduit *le premier membre* de l'équation (1), en y ajoutant des termes avec des dérivées d'ordre *moindre* que n. D'où, pour (1), la forme *canonique*, permettant les approximations successives,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) = \Psi.$$

[Thèse de M. Delassus (*Ann. Éc. Norm.*, 1895.)]

Pour la théorie générale des *caractéristiques*, nous renvoyons à M. Goursat.

Équation d'ordre 2, *à n variables.* — Prenons, pour simplifier l'exposition, $n = 3$; soit l'équation

$$(1) \qquad F = \sum_{ik} a_{ik} p_{ik} + f = 0;$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}; \qquad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k} = p_{ki}; \qquad p_{ikh} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_h}; \qquad \dots$$

Les données sont portées par la surface frontière S :

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = P_1; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = P_2; \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} = P_{12}; \qquad \dots$$

On donne, sur S, les valeurs de z. Sur S, $z(x_1, x_2, x_3)$ devient $\bar{z}(x_1, x_2)$, *fonction connue* des *deux variables* x_1, x_2.

Chaque fois qu'il sera nécessaire de spécifier nettement qu'une fonction de trois variables se réduit, *sur une surface, à une nouvelle fonction de deux variables,* nous l'indiquerons par ce trait : $\bar{z}$.

Dans (1), f ne contient que des dérivées de z d'ordre 1, au plus.

p_i dépend *de* trois variables. Cherchons sa valeur $\bar{p}_i$ sur S.

Nous n'avons qu'à écrire

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i} = \text{fonction connue} = \overline{p_i} + P_i \overline{p_3} \qquad (i = 1, 2).$$

Donc si, sur S, outre $\bar{z}$, on donne $\overline{p_3}$, on connaîtra $\overline{p_1}$ et $\overline{p_2}$, valeurs sur S de p_1 et p_2.

Montrons qu'on connaîtra toutes les dérivées de tout ordre :

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \overline{p_k}}{\partial x_i} = \text{fonction connue} = \overline{p_{ki}} + P_i \overline{p_{k3}}, \\ &\frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_i} = \overline{p_{3i}} + P_i \overline{p_{33}} \\ &\qquad (i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3), \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\overline{p_{ik}} = \frac{\partial \overline{p_i}}{\partial x_k} - P_k \frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_i} + P_i P_k \overline{p_{33}}.$$

Il suffira de connaître $\overline{p_{33}}$. Or, l'équation (1) donne alors

$$\text{(2)} \qquad H \overline{p_{33}} + K = 0,$$

ayant posé

$$H = \sum{}' a_{ik} P_i P_k - \sum{}' a_{i3} P_i + a_{33},$$

$$K = \sum{}' a_{ik} \left(\frac{\partial \overline{p_i}}{\partial x_k} - P_k \frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_i} \right) + \sum{}' a_{i3} \frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_i} + f,$$

$\sum'$ indiquant que i et k prennent seulement les valeurs 1, 2.

Si l'on a $H = 0$, on ne peut calculer ni p_{33}, ni p_{333}, etc. C'est l'équation des *surfaces caractéristiques* obtenue par J. Beudon ([1]).

IV. — Sur l'équation adjointe et la dérivée conormale.

L'idée fondamentale est due à Lagrange.

Soit

$$F(z) = \sum A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0.$$

On appelle *adjointe*

$$G(u) = \sum (-1)^{i+k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \, dy^k} (A_{ik} u) = 0.$$

On a la propriété caractéristique

$$u\,F(z) - z\,G(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

qui se vérifie de suite, car

$$u \frac{\partial^h}{\partial x^h} w - (-1)^h w \frac{\partial^h}{\partial x^h} u = D(\Omega),$$

dérivée d'une fonction de u, w, et les $(h-1)$ premières dérivées.

Faisons

$$w = \frac{\partial^k}{\partial y^k} v$$

et nous avons

$$u \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} v - (-1)^h \frac{\partial^k}{\partial y^k} v \frac{\partial^h}{\partial x^h} u = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

([1]) *Voir* Bäcklund, *Mathem. Annalen*, t. XIII. — J. Beudon, *Soc. math. de France*, 1895. — J. Coulon, *Thèse*, 1902. — J. Hadamard a complété la théorie de Beudon (*Leçons sur la propagation des ondes*, Hermann, 1903).

Changeons u en v, x en y, h en k; nous avons une équation analogue, d'où

$$u\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h\,\partial y^k}v-(-1)^{h+k}v\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h\,\partial y^k}u=\frac{\partial P}{\partial x}-(-1)^{h+k}\frac{\partial Q}{\partial y},$$

d'où la formule (G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II).

Prenons maintenant une équation d'ordre 2 à n variables :

$$F(z)=\sum a_{hk}p_{hk}+\sum a_h p_h+lz=0,\qquad p_{hk}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_h\,\partial x_k}.$$

L'adjointe est

$$G(u)=\sum\frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_k}(a_{hk}u)-\sum\frac{\partial}{\partial x_h}(a_h u)+lu=0.$$

On a

$$u\,F(z)-z\,G(u)=\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial M_n}{\partial x_n}$$

(J. Hadamard, *Propagation des ondes*).

Ces formules permettent de passer de l'intégrale n-uple *dans un domaine* à une intégrale $(n-1)$-uple *au contour*.

Les caractéristiques étant réelles, il s'introduit dans l'intégrale au contour une dérivée suivant la *conormale,* direction liée à la normale (ou à la tangente). Et ceci donne des résultats intuitifs permettant d'éviter des calculs et de voir immédiatement les *frontières exceptionnelles* relativement au théorème de Cauchy.

Nous établirons la formule dans chaque cas, renvoyant au Livre de M. Hadamard pour la théorie générale ([1]).

([1]) La *conormale* a été définie par l'auteur dans son étude de l'équation des ondes (*Comptes rendus,* 11 février 1901). M. Coulon a fait l'extension au cas général (*Comptes rendus,* juillet 1901). M. Hadamard a montré que la direction conormale est *bicaractéristique. Voir* encore M. Burgatti, qui, dans un Mémoire cité plus loin, définit de la même manière, la direction *cotangente* (*Acc. dei Lincei,* 1906).

V. — Sur la partie finie d'une intégrale infinie.

1. *Intégrale simple.* — Soit

$$F(\alpha) = \int_A^B f(x, \alpha)\, dx.$$

Si A et B sont des fonctions de α *continues,* ainsi que leurs dérivées premières, et si $f(x, \alpha)$ admet une dérivée, par rapport à α, *continue,* il est bien connu qu'on a

$$(1) \qquad \frac{dF}{d\alpha} = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx + f(B, \alpha)\frac{dB}{d\alpha} - f(A, \alpha)\frac{dA}{d\alpha}.$$

Passons au cas des intégrales généralisées. Soit

$$(2) \qquad V(\alpha) = \int_0^\alpha f(x, \alpha)\frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}}.$$

Nous supposons que $f(x, \alpha)$ admet des dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ déterminées et *continues* (¹).

V est une fonction bien déterminée et continue. On peut donc faire le changement de variables

$$a - x = \alpha(1 - y),$$

et V devient V_1 :

$$V_1(\alpha) = \int_0^1 f(\alpha y, \alpha)\sqrt{\alpha}\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

Considérons d'ailleurs l'intégrale

$$W_1(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}[f(\alpha y, \alpha)\sqrt{\alpha}]\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

D'après les hypothèses faites, les intégrales V_1 et W_1 *convergent uniformément* (¹), d'où

$$W_1 = \frac{dV_1}{d\alpha}.$$

(¹) *Voir,* sur ces questions, le Mémoire de M. de la Vallée-Poussin dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1892.

Mais on peut écrire

$$W_1 = \lim_{h=0} \left[\int_0^{1-h} \frac{\partial}{\partial \alpha} (f\sqrt{\alpha}) \frac{dy}{\sqrt{1-y}} \right].$$

Posons

$$J_h = \int_0^{1-h} f\sqrt{\alpha} \frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

On a

$$W_1 = \lim_{h=0} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} J_h \right).$$

Cette limite *existe certainement*, comme on le verrait en faisant dans W_1 le changement

$$1 - y = z^2.$$

Donc enfin

$$\frac{dV}{d\alpha} = \lim_{h=0} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\alpha(1-h)} f(x, \alpha) \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} \right]. \tag{3}$$

Mais en dérivant J_h, intégrale ci-dessus, où h est *fini* pour l'instant, nous pouvons employer la formule (1) :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J_h = \int_0^{\alpha(1-h)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{f(x, \alpha)}{\sqrt{\alpha - x}} dx + \frac{f[\alpha(1-h), \alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}} \frac{d}{d\alpha} [\alpha(1-h)]. \tag{4}$$

Cette expression (4) renferme deux termes qui *croissent indéfiniment* lorsque h tend vers zéro, mais dont *la somme est finie,* quelque petit que soit h. Nous le savons d'avance par le changement de variables; vérifions-le :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{f(x, \alpha)}{\sqrt{\alpha - x}} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} - f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} \right).$$

Alors

$$\int_0^{\alpha(1-h)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{f(x, \alpha)}{\sqrt{\alpha - x}} dx$$

$$= \int_0^{\alpha(1-h)} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} - f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} \right) dx \right].$$

La première intégrale sera *finie,* d'après nos hypothèses.

La deuxième intégrale donne

$$-\left(\frac{f(x,\alpha)}{\sqrt{\alpha-x}}\right)_0^{\alpha(1-h)}+\int_0^{\alpha(1-h)}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}.$$

Ici encore l'intégrale est *finie*. Donc

$$\frac{\delta J_h}{\partial\alpha}=\text{partie finie}+\frac{f[\alpha(1-h),\alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}}(1-h)-\frac{f[\alpha(1-h),\alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}}.$$

Il est clair que *les deux termes* en $\frac{1}{\sqrt{h}}$, *devenant chacun infini* pour $h=0$, *ont une somme finie, quelque petit que soit h*, puisque la somme contient en facteur $\sqrt{h}$.

Cette forme nouvelle s'est montrée indispensable dans l'étude de l'équation des ondes.

Même notion de *partie finie* avec l'intégrale multiple.

2. *Intégrale multiple.* — Le champ W et la fonction φ dépendent d'un paramètre λ :

$$(1)\qquad I=\iiint_W \varphi(x,y,z)\,d\tau,$$

$$(2)\qquad I+\Delta I=\iiint_{W+\Delta W}(\varphi+\Delta\varphi)\,d\tau.$$

Nous cherchons $I'=\lim\frac{\Delta I}{\Delta\lambda}$.

Pour cela, amenons (1) et (2) à avoir même domaine en faisant correspondre à tout point (x,y,z) de $(W+\Delta W)$ un point (X,Y,Z) de W par les formules

$$x=X+\xi,$$
$$y=Y+\eta,$$
$$z=Z+\zeta,$$

avec la condition que la transformation vaille pour passer d'une frontière à l'autre. ξ, η, ζ sont des fonctions *infiniment petites* assujetties à cette seule condition.

Alors

$$\mathrm{I} + \Delta\mathrm{I} = \int\int_{(\mathrm{W})}\int \Psi \mathrm{J}\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z},$$

J étant le jacobien

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial\xi}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial\xi}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial\xi}{\partial \mathrm{Z}} \\ \frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{X}} & 1 + \frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{Z}} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial\zeta}{\partial \mathrm{Y}} & 1 + \frac{\partial\zeta}{\partial \mathrm{Z}} \end{vmatrix},$$

Ψ étant la fonction $\varphi + \Delta\varphi$ exprimée en X, Y, Z.

On a

$$\mathrm{J} = 1 + \frac{\partial\xi}{\partial \mathrm{X}} + \frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{Y}} + \frac{\partial\zeta}{\partial \mathrm{Z}} + \text{inf. petit}.$$

Or,

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \xi\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{X}} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Y}} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Z}} + \ldots$$

et

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \Delta\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \ldots.$$

Donc

$$\Psi\mathrm{J} = \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}(\varphi\xi) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}(\varphi\eta) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}}(\varphi\zeta)\right] + \ldots.$$

Enfin, on a

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\mathrm{I} = \int\int_{(\mathrm{W})}\int \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}(\varphi\xi) &+ \frac{\partial}{\partial \mathrm{Y}}(\varphi\eta) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}}(\varphi\zeta)\Big]\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

D'où la dérivée, en remarquant que ξ, η, ζ contiennent $\Delta\lambda$ en facteur.

Représentons $\lim_{\Delta\lambda=0}\left(\frac{\xi}{\Delta\lambda}\right)$ par ξ', etc. Nous avons une intégrale étendue au volume W et une intégrale étendue à son contour Σ :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\mathrm{I}}{\partial\lambda} &= \int\int_{\mathrm{W}}\int \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\, dx\, dy\, dz \\ &+ \int\int_{\Sigma} \varphi(\xi'\cos\alpha + \eta'\cos\beta + \zeta'\cos\gamma)\, d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Il était clair que seules les valeurs de ξ', η', ζ' sur Σ interviendraient.

(Nous avons repris la notation x, y, z au lieu de X, Y, Z.)

Nous aurons à faire de cette formule l'usage suivant :

W sera le cône

$$R^2 = (z - z_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0$$

et

$$\varphi = \frac{F}{R}$$

(F étant régulier); il se présente encore une *partie finie* [1].

VI. — Sur un problème fonctionnel de M. Goursat.

Soient $\pi(x)$, *défini dans l'intervalle* $0 - a$, *dérivable, et* α *une constante; déterminer* φ *tel que*

$$\varphi(\alpha x) - \varphi(x) = \pi(x).$$

D'abord on doit avoir $\pi(0) = 0$, puis remplaçons x par $\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha^2}, \ldots, \frac{x}{\alpha^n}, \ldots$ (on peut supposer $\alpha > 1$); nous avons

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_1^\infty \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right).$$

Si la série converge dans un intervalle fini $0 - b$, même très petit, elle converge dans l'intervalle $0 - a$, $\frac{x}{\alpha^p}$ finissant par être moindre que b.

Nous avons un cas, très général, de convergence. Si, dans l'intervalle $0 - b$, on a

(C) $$|\pi(x)| < Kx^\mu \qquad (K > 0,\ \mu > 0),$$

(1) Cette notion a été introduite simultanément par M. Hadamard (*Congrès de Math.*, 1904) et par l'auteur, dans sa *Thèse* (*Journ. de Math.*, 1904).

il y a convergence *uniforme,* car on aura

$$\left|\pi\left(\frac{x}{\alpha^p}\right)\right| < \frac{K a^\mu}{\alpha^{p\mu}}.$$

Si la dérivée $\pi'(x)$ est lipschitzienne,

$$(C') \qquad |\pi'(x)| < K_1 x,$$

la série dérivée est aussi *uniformément* convergente dans l'intervalle $0 - a$:

$$\varphi'(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{\alpha^n}\pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right), \qquad \left|\frac{1}{\alpha^n}\pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)\right| < \frac{K_1 a}{\alpha^{2n}}.$$

On a, de suite, des majorantes.

Remarquons que (C′) entraîne (C) avec $\mu = 1$, d'où

$$|\varphi(x)| < K\, x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \ldots\right) = \frac{Kx}{\alpha - 1},$$

$$|\varphi'(x)| < K_1 x\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots\right) = \frac{K_1 x}{\alpha^2 - 1}$$

(E. Goursat, *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse,* 2e série, t. VI).

SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY ET DE PROBLÈMES ANALOGUES.

I. — La méthode de Riemann.

Soit une équation linéaire du second ordre, à deux variables; cherchons, avec Riemann, la solution effective du problème de Cauchy : z et ses dérivées premières sont données sur une courbe $\beta\gamma$ (ce qui ne fait que *deux données*).

Dans quel cas *une seule* donnée suffit-elle?

Soient

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

et l'adjointe

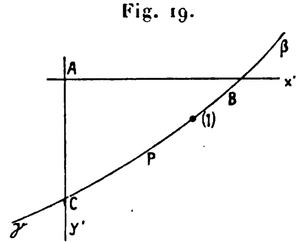
$$G(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(bu) + cu = 0;$$

z et u étant des solutions, on a, pour un contour fermé Ω,

$$\int_\Omega M\,dy - N\,dx = 0.$$

Prenons le contour formé par les parallèles aux axes Ax', Ay' et par l'arc BC, découpé sur la courbe $\beta\gamma$, et étudions cette intégrale.

Fig. 19.



Avec une équation en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, la *conormale* est la symétrique de la normale. Donc ici la conormale devient *symétrique de la tangente* par rapport à l'axe des x :

$$(5)\qquad \frac{dx}{dN} = \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{dy}{dN} = -\frac{dy}{ds},$$

s étant le contour Ω, ou bien

$$(6)\qquad \frac{d}{dN} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{ds}.$$

L'intégrale suivant BC donne

$$J_1 = \int_B^C auz\,dy - buz\,dx + \frac{1}{2}\int_B^C \left(z\frac{du}{dN} - u\frac{dz}{dN}\right) ds.$$

Supposons donc que z et $\frac{dz}{dN}$ sont *donnés* sur BC.

Sur les parallèles aux axes, nous avons les intégrales sui-

vantes, après une immédiate transformation :

$$\int_A^B \left(z\frac{\partial u}{\partial x} - buz\right)dx - \frac{1}{2}[(uz)_B - (uz)_A] = J_2,$$

$$\int_C^A \left(auz - z\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{1}{2}[(uz)_A - (uz)_C] = J_3.$$

Si l'on peut déterminer u, annulant (2) et tel que

$$\frac{\partial u}{\partial x} - bu = 0 \quad \text{sur } \overline{AB}, \qquad \text{pour } y = y_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - au = 0 \quad \text{sur } \overline{AC}, \qquad \text{pour } x = x_0,$$

on voit que $(uz)_A$ est connu.

Donc z *est connu au point* $A(x_0, y_0)$, en fonction des valeurs de z et $\frac{dz}{dN}$ sur l'arc BC.

L'emploi de la conormale rend intuitif ce théorème :

Si la courbe BC *se compose de deux parallèles aux axes, il suffit de donner sur* BC *la valeur de z, car celle de $\frac{dz}{dN}$ en résulte immédiatement.*

Ainsi, le problème de Riemann est ramené à celui-ci :

Trouver une intégrale $u(x_0, y_0; x, y)$ de l'adjointe (2), *connaissant ses valeurs :*

$$\begin{cases} e^{\int_{x_0}^{x} b\,dx} & \text{sur } \overline{AB}, \\ e^{\int_{y_0}^{y} a\,dy} & \text{sur } \overline{AC}, \\ u = 1 & \text{au point A}, \end{cases}$$

et l'on a alors

$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - J_1.$$

Admettons donc, pour l'instant, qu'il existe une fonction de Riemann. Nous avons (*voir* G. DARBOUX, *Théorie*

des surfaces, t. II)

$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - J_1,$$

$$J_1 = \int_B^C auz\,dy - buz\,dx + \frac{1}{2}\int_B^C \left(z\frac{du}{dN} - u\frac{dz}{dN}\right) ds.$$

Supposons que le contour BC se compose de deux parallèles aux axes, BD et DC.

Faisons sur ces droites les mêmes intégrations que sur AB et CA; il vient

$$J_1 = \frac{(uz)_C - (uz)_D}{2} + \int_D^C - u\left(bz + \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx$$

$$- \frac{(uz)_D - (uz)_C}{2} + \int_B^D u\left(az + \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy,$$

O x

(x_0, y_0) A → B

↑ ↓

C ← D (x_1, y_1)

y

$$z_A = (uz)_D + \int_B^D - u\left(az + \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \int_D^C u\left(bz + \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx.$$

Si maintenant nous posions

$$\begin{cases} bz + \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 & \text{sur } \overline{DC}, \\ az + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 & \text{sur } \overline{BD}, \\ z = 1 & \text{au point } D(x_1, y_1), \end{cases}$$

ce qui reviendrait à regarder z comme l'adjointe de u (au lieu de u comme adjointe de z), nous aurions

$$z_A = u_D,$$

ou, pour préciser,

$$z(x_1, y_1; x_0, y_0) = u(x_0, y_0; x_1, y_1).$$

Donc nous pouvons échanger u et z, à condition d'échanger les rôles de x, y et x_0, y_0 :

$$\begin{cases} u(x_0, y_0;\ x, y) \text{ est solution de l'adjointe;} \\ u(x, y;\ x_0, y_0) \text{ est solution de la primitive équation.} \end{cases}$$

La *fonction de Riemann* [1], sous ce rapport, est analogue à la *fonction de Green*.

Nous le vérifions de suite sur un exemple. L'équation, identique à son adjointe

$$s = \alpha z \qquad (\alpha = \text{const.}),$$

admet la solution

$$f(t) = 1 + \frac{\alpha t}{1} + \frac{(\alpha t)^2}{(\underline{|2})^2} + \ldots + \frac{(\alpha t)^n}{(\underline{|n})^2} + \ldots,$$

dans laquelle

$$t = (x - x_0)(y - y_0).$$

La symétrie est évidente.

Si nous obtenons une fonction de Riemann, continue, nous prouverons aisément : 1° que la solution vérifie l'équation; 2° que, si l'on s'approche de la frontière portant les données, il y a continuité entre la solution et la donnée. Nous aurons fait *la synthèse de la solution.*

Nous parvenons à ce but par les *approximations successives* de M. Picard.

II. — Les approximations successives de M. Picard.

Nous posons d'abord le problème de trouver l'intégrale d'une équation linéaire hyperbolique étant données ses valeurs sur des parallèles aux axes, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$. Nous com-

(1) *Voir,* sur ces questions : Riemann, *Œuvres,* et Riemann-Weber, *Partielle Differentialgleichungen.* — P. du Bois-Reymond, *Journal de Crelle,* t. 104. — G. Darboux, *Leçons,* t. II. (Nous suivons son exposition.)

valeur donnée de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur la courbe, $\psi(y)$ la valeur donnée de $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Posons

$$F(x) = \int_{X_1}^{x} \varphi(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad G(y) = \int_{Y_1}^{y} \psi(y)\,dy.$$

La fonction $F(x) + G(y)$ est une première partie de la solution. C'est une fonction qui, ainsi que ses premières dérivées, prend les valeurs données sur RQ. Nous avons alors à trouver une fonction *nulle* sur RQ. Il suffit, pour cela, d'écrire le même système d'équations, en faisant les *quadratures,* non plus dans les rectangles ρ_i mais dans les triangles correspondants, formés par RQ et les parallèles aux axes issues de (ξ, η).

Pour prouver la *convergence absolue et uniforme* de la *série de fonctions* obtenue, il suffit de majorer de la manière suivante :

On remplace la fonction par une limite supérieure de son module et l'on augmente l'aire de quadrature en remplaçant le triangle de sommet (ξ, η) par le rectangle ρ_i de même sommet.

On passe alors à l'équation

$$s = ap + bq + cz + f(x, y)$$

(Note de M. Picard dans le Tome IV des *Leçons de M. Darboux*). Il est extrêmement intéressant de noter que des difficultés plus grandes se présentent pour l'équation non linéaire.

Pour le cas précédent, la méthode primitive de M. Picard (*Journ. de Math.,* 1890), méthode directe, conduisait à prendre des domaines *assez petits.*

On restait dans un rectangle de base α, de hauteur β et l'on avait

$$|z_1| < M\alpha\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < M\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < M\alpha.$$

Soient A, B, C les maxima de [illegible] dans le rectangle [illegible]

[illegible]

Il fallait avoir

[illegible]

Le rectangle devait être, donc, assez petit.
C'est ce qui arrive pour l'équation

$$s = F(x, y, z, p, q).$$

Nous avons la chaîne

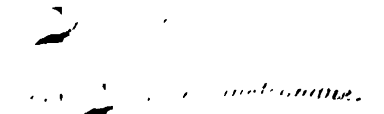
$$z_0 = F(x) + G(y) \quad \beta,$$
$$z''_1 = F(x, y, z_0, p_0, q_0) - F_0,$$
$$z''_2 = F(x, y, z_1, p_1, q_1) - F_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Chaque solution prend la valeur donnée au [illegible], ou bien, par un changement de fonction, qui modifie F, on a ramené ces données à zéro; peu importe, [illegible] à la chaîne équivalente

[illegible]

[illegible] donc [illegible] nulle.

[illegible] condition [illegible] un rectangle assez [illegible]



[illegible] inconnue.

M. Picard passe ensuite au cas où l'on donne z :

1° Sur l'axe Ox; 2° sur la bissectrice $y = x$.

Par un changement de variables, on passe au cas où z est donné : 1° sur l'axe Ox; 2° sur une courbe située dans le premier quadrant.

III. — Nouvelles applications des approximations successives.

Montrons une très notable extension des méthodes de M. Picard, due à M. Goursat.

M. Goursat pose d'abord ce problème :

1. *Problème de M. Goursat. — Trouver une solution de*

$$s = f(x, y),$$

nulle sur les droites

$$y = x, \qquad y = \alpha x \qquad (\alpha > 1).$$

Écrivons la solution générale

$$F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

ou

$$\int_0^x du \int_0^y f(u, v)\, dv + \varphi(x) + \psi(y);$$

φ et ψ, arbitraires, seront déterminés par

$$F(x, x) + \varphi(x) + \psi(x) = 0, \qquad F(x, \alpha x) + \varphi(x) + \psi(\alpha x) = 0,$$
$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = F(x, x) - F(x, \alpha x) = \pi(x).$$

Nous sommes ramené à un problème résolu, car on a

$$\pi(x) = (1 - \alpha) x F'_y(x, \zeta x) \qquad (1 < \zeta < \alpha),$$

d'où

$$|\pi(x)| < M(\alpha - 1) x^2,$$

d'après les relations immédiates

$$|F| < Mxy, \qquad |F'_x| < My, \qquad |F'_y| < Mx.$$

Nous avons

$$\psi(x) = \sum_{1}^{\infty} \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right),$$

$$|\psi(x)| < Mx^2 \left|\frac{\alpha - 1}{1 - \alpha^2}\right| = \frac{Mx^2}{1 + \alpha}.$$

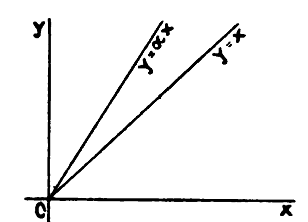
De même

$$\varphi(\alpha x) - \varphi(x) = F(x, \alpha x) - F(\alpha x, \alpha x) = \pi_1(x),$$

$$\pi_1(x) = (1 - \alpha) x F'_x(\zeta_1 x, \alpha x) \qquad (1 < \zeta_1 < \alpha),$$

$$|\pi_1(x)| < M(\alpha - 1) x(\alpha x),$$

Fig. 22.



d'où

$$|\varphi(x)| < \frac{M\alpha x^2}{1 + \alpha}.$$

Finalement on a, pour la solution z,

$$|z(x, y)| < Mxy + \frac{M\alpha x^2}{1 + \alpha} + \frac{My^2}{1 + \alpha}.$$

Étudions les dérivées, en posant

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Y.$$

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= X(x, x) + Y(x, x) - X(x, \alpha x) - \alpha Y(x, \alpha x) \\ &= X(x, x) - X(x, \alpha x) + Y(x, x) - Y(x, \alpha x) + (1 - \alpha) Y(x, \alpha x). \end{aligned}$$

1° $$|X(x, x) - X(x, \alpha x)| < M(\alpha - 1) x,$$

X contenant le signe $\int$ c'est immédiat.

2° $$|(1 - \alpha) Y(x, \alpha x)| < M(\alpha - 1) x.$$

3° Supposons la fonction f lipschitzienne, c'est-à-dire

$$|f(x', y') - f(x, y)| < H|x' - x| + K|y' - y|,$$

on a

$$Y(x, \alpha x) - Y(x, x) = \int_0^x [f(u, \alpha x) - f(u, x)]\, du,$$

le module est donc moindre que $K(\alpha - 1)x^2$.

D'où

$$|\pi'(x)| < 2M(\alpha - 1)x + K(\alpha - 1)x^2.$$

Or

$$\psi'(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{\alpha^n} \pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right),$$

d'où

$$|\psi'(y)| < \frac{2My}{\alpha + 1} + \frac{Ky^2}{\alpha^2 + \alpha + 1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} z(x, y)\right| < Mx + |\psi'(y)|.$$

De même

$$|\pi_1'(x)| < 2M\alpha(\alpha - 1)x + H\alpha(\alpha - 1)x^2,$$

$$|\varphi'(x)| < \frac{2M\alpha x}{\alpha + 1} + \frac{H\alpha x^2}{\alpha^2 + \alpha + 1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)\right| < My + |\varphi'(x)|.$$

2. *Nous pouvons maintenant intégrer*

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

dans le premier quadrant, f étant continu au voisinage de $x = y = z = p = q = 0$, si l'on a

$$|f(x, y, z', p', q') - f(x, y, z, p, q)|$$
$$< H|z' - z| + K|p' - p| + L|q' - q|,$$

z étant nul pour $y = x$ et $y = \alpha x$.

Soit $z_0 = 0$,

$$s_n = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} z_n = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

M étant une limite supérieure de f lorsqu'on a

$$0 \leqq x \leqq r, \qquad 0 \leqq y \leqq r\alpha,$$

d'après ce qui précède,

$$|z_n| < \text{MA}r^2, \qquad |p_n| < \text{MB}r, \qquad |q_n| < \text{MC}r,$$

ceci en tout point du domaine défini par r; A, B, C dépendent de α *seul*.

Si la série

$$z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots$$

converge, elle représentera $\lim\limits_{n=\infty} z_n$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(z_n - z_{n-1}) = f(x, y, z_{n-1} \ldots) \\ - f(x, y, z_{n-2} \ldots) = f_{n-1} - f_{n-2}.$$

Si, dans le domaine, on a

$$|z_{n-1} - z_{n-2}| < \text{T}, \qquad |p_{n-1} - p_{n-2}| < \text{T}, \qquad |q_{n-1} - q_{n-2}| < \text{T},$$

il vient

$$|f_{n-1} - f_{n-2}| < (\text{H} + \text{K} + \text{L})\text{T},$$
$$|z_n - z_{n-1}| < \text{A}(\text{H} + \text{K} + \text{L})\text{T}r^2,$$
$$|p_n - p_{n-1}| < \text{B}(\text{H} + \text{K} + \text{L})\text{T}r,$$
$$|q_n - q_{n-1}| < \text{C}(\text{H} + \text{K} + \text{L})\text{T}r.$$

Ceci fixera r. Nous le prendrons tel que ces trois seconds membres soient moindres que λT,

$$\lambda < 1.$$

Soit alors N le plus grand des trois nombres

$$\text{MA}r^2, \quad \text{MB}r, \quad \text{MC}r.$$

Nous avons, en somme,

$$|z_1 - z_0| < \text{N}, \qquad |z_2 - z_1| < \text{N}\lambda, \qquad \ldots, \qquad |z_n - z_{n-1}| < \text{N}\lambda^{n-1},$$

et les mêmes relations pour $|p_n - p_{n-1}|$, $|q_n - q_{n-1}|$.

Donc z_n, p_n, q_n ont des *limites* pour $n = \infty$.

Puis

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(z_n - z_{n-1})\right| < (H + K + L)N\lambda^{n-2}.$$

Donc s_n a aussi une limite

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} z_n(x, y) = \omega(x, y) \quad \text{solution cherchée.}$$

La solution est unique (*voir* le Mémoire de M. Goursat).

3. *Extensions.* — Intégrale déterminée par

$$z = \varphi(x) \quad \text{sur la droite} \quad y = mx \quad (m > 0),$$
$$z = \varphi_1(x) \quad \text{»} \quad y = m_1 x \quad (m_1 > 0).$$

Soit $m_1 > m$, posons

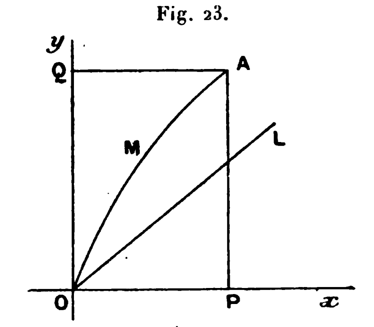
$$mx = x',$$

$$z = Z + \varphi\left(\frac{y - \frac{m_1}{m}x'}{m - m_1}\right) + \varphi_1\left(\frac{y - x'}{m_1 - m}\right) - \varphi(0),$$

Z satisfait à une équation de même forme et s'annule pour $y = x'$, $y = \frac{m_1}{m}x'$.

4. Intégrale nulle pour $y = x$, $y = \omega(x)$, la courbe $\omega(x)$

Fig. 23.



ayant la forme de OMA.

M. Goursat résout, pour cela, le problème fonctionnel

$$\varphi[\omega(x)] - \varphi(x) = \pi(x),$$

ω et π sont donnés, φ est l'inconnue.

5. On donne

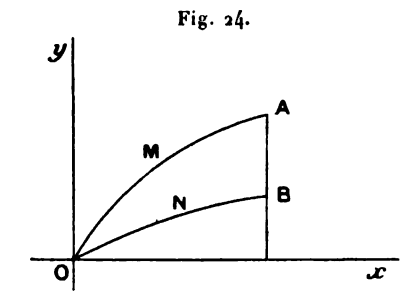
$$z = \mathrm{F}(x) \quad \text{pour} \quad y = x,$$
$$z = \Phi(x) \quad \text{pour} \quad y = \omega(x).$$

Nous prenons u tel que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ avec ces conditions, et nous posons

$$z = \mathrm{Z} + u.$$

6. Intégrale nulle pour $y = \omega(x)$, $y = \omega_1(x)$.

Fig. 24.



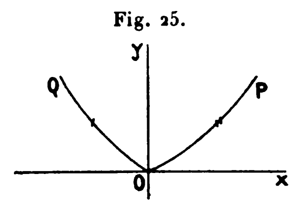
Nous ramenons au deuxième cas, en posant

$$\omega_1(x) = \mathrm{X}.$$

Et nous passons enfin au cas de données non nulles, pour z, sur ces deux arcs situés dans le premier quadrant.

7. Il faut bien remarquer que si les données sont portées

Fig. 25.



par les courbes OP, OQ, situées dans deux quadrants différents, on devra donner les données z, $\frac{dz}{d\mathrm{N}}$ sur l'une, soit OP; la donnée z seule sur l'autre, soit OQ; car la première donnée *détermine* z sur Oy.

Alors dans le second quadrant, z est connu sur Oy et OQ ([1]). On voit que nous avons résolu ici un problème autre que celui de Cauchy. Mais Cauchy avait ouvert la voie, par ses théorèmes généraux d'existence.

IV. — L'ÉQUATION DES ONDES GÉNÉRALISÉE.

Prenons l'équation des ondes, à caractéristiques réelles, à 3 ou 4 variables.

Après les travaux classiques de Poisson et Kirchhof, M. V. Volterra s'est nettement placé au point de vue de la *méthode de Green-Riemann* et il a obtenu une belle solution, qui a été complétée ensuite.

1. *Équation à trois variables*

$$A(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} u = F(x, y, z).$$

La *conormale* N est la symétrique de la normale extérieure n, par rapport au plan horizontal, et l'on a

$$(G) \int_3 [uA(V) - VA(u)]\, d\tau = \int_2 \left(u \frac{dV}{dN} - V \frac{du}{dN}\right) d\omega.$$

(Intégrale de volume.) (Intégrale sur le contour.)

C'est immédiat, sauf qu'on n'avait pas remarqué autrefois que le second membre contient des *dérivées véritables*.

La surface Σ porte les données, u, $\frac{du}{dN}$; nous la coupons

---

([1]) E. PICARD, *Bull. des Sciences math.*, 1899; *Soc. math. de France*, 1894. — E. GOURSAT, *Ann. Fac. de Toulouse*, 2ᵉ série, t. V et VI. — J. HADAMARD, *Soc. math. de France*, t. XXVIII, XXXI, XXXII. Pour ce type de problèmes, M. Picard a résolu une nouvelle équation intégrale. *Voir* les *Comptes rendus*, 1907.

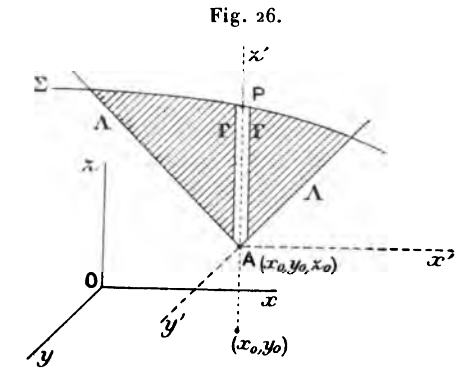
par un *cône caractéristique* Λ,

$$(z - z_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0,$$

et nous cherchons à obtenir la valeur de u, *au sommet*.

Il nous faut une adjointe V (ici l'adjointe est *identique* à l'équation) qui soit *nulle* sur le cône Λ, de sommet A.

Fig. 26.



Nous sommes alors certain que, sur Λ, on a

$$\frac{dV}{dN} = 0.$$

En plus, $V(x, y, z)$ sera *infinie* sur l'axe vertical Az'.

Dans ces conditions, si l'on applique la formule fondamentale au volume marqué par des hachures, si u et $\frac{du}{dN}$ sont donnés sur Σ, la formule se réduira à une intégrale simple étendue de A en P égalée à un terme connu.

Une inversion donnera u intégrale de $A(u) = F(x, y, z)$. Montrons-le.

2. Soit A : (x_0, y_0, z_0), soient

$$z' = z - z_0, \qquad x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0,$$
$$r^2 = x'^2 + y'^2;$$

soit

$$\theta = \frac{z'}{r} > 1.$$

Cherchons une fonction $V = \varphi(\theta)$. On a

$$A(V) \equiv \frac{1}{r^2}\left[(\theta^2 - 1)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \theta\frac{d\varphi}{d\theta}\right] = 0,$$

$$V = \varphi = \log\left[\frac{z'}{r} + \sqrt{\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 1}\right],$$

V est bien *nulle* sur le cône Λ, qui a pour équation

$$\frac{z'}{r} = 1.$$

Soit $r = \varepsilon$ l'équation du cylindre vertical Γ, de rayon très petit. La formule (G) donne

$$-\iiint_{(W)} VF(x, y, z)\, dz = \iint_{(\Sigma+\Gamma)} \left(u\frac{dV}{dN} - V\frac{du}{dN}\right) d\omega.$$

Or

$$\iint_{(\Gamma)} V\frac{du}{dN}\, d\omega = \iint_{(\Gamma)} V\frac{du}{dN}\, \varepsilon\, d\alpha\, dz.$$

D'après un raisonnement constant, on peut faire évanouir ε et cette intégrale donnera donc *zéro*.

Il reste l'intégrale

$$I = \iint_{(\Gamma)} u\left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right) d\omega,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial r}\, d\omega = \frac{z - z_0}{r\sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}}\, r\, d\hat{a}\, dz.$$

I est indépendant de $r = \varepsilon$. Faisons tendre ε vers zéro et nous avons

$$I = \int_0^{2\pi} d\hat{a} \int_{z_0}^{z_1} u(\overline{x_0}, \overline{y_0}, z)\, dz.$$

Posons

$$J_A = \int_3 VF\, d\tau + \int_2 \left(u\frac{dV}{dN} - V\frac{du}{dN}\right) d\omega.$$

Nous avons

$$2\pi u_A = \frac{\partial J_A}{\partial z_0}.$$

3. Si la surface Σ n'est coupée qu'en *un point* par tout cône caractéristique ayant son sommet sur Σ, on vérifie bien : 1° que $A(u) = 0$; 2° que u et ses dérivées prennent les valeurs données à la frontière (*Synthèse,* faite par l'auteur). M. Hadamard a étudié l'équation analogue où les coefficients des dérivées secondes *ne sont plus constants.* MM. Tedone et Coulon ont fait diverses extensions très importantes de la méthode de M. Volterra ([1]). Celui-ci avait été précédé, à un point de vue différent, par Poisson, Kirchhof, Beltrami.

La direction conormale, nous l'avons dit, donne immédiatement celles des surfaces Σ sur lesquelles la donnée de u est *seule* nécessaire et suffisante. L'emploi des *partie-finie* permet d'intégrer l'équation plus générale, où le second membre contient des dérivées premières. C'est une nouvelle application des *approximations successives.*

4. *Équation à quatre variables :*

$$B(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, y, z, t).$$

Le point de départ est identique.

Ici

$$V = \frac{t - t_0}{r} - 1, \qquad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2;$$

$$4\pi \int_{t_1}^{t_0} u(x_0, y_0, z_0, t)(t - t_0)\, dt$$
$$= \iiiint v F\, d\tau + \iiint \left(u \frac{dv}{dN} - v \frac{du}{dN}\right) d\omega.$$

Donc $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$ s'obtient par *deux* dérivations en t_0.

([1]) V. Volterra, *Acta mathematica,* 1894. — O. Tedone, *Annali di Matematica,* 1898. — J. Coulon, *Thèse,* 1902 (Hermann). — J. Hadamard, *Leçons,* 1903 (Hermann); *Ann. Ec. norm.,* 1905. — R. d'Adhémar, *Comptes rendus,* 1901 et 1902; *Journ. de M. Jordan,* 1904 et 1906; *Rendiconti del Circ. di Palermo,* 1905. — T. Levi-Civita, *Nuovo Cimento,* 1897.

Mais, en les effectuant, on s'aperçoit : 1° qu'il ne se présente pas de *partie-finie;* 2° que le résultat *ne contient que les données u,* $\frac{du}{dN}$ *sur le bord de l'hypersurface,* sur l'intersection de la surface des données $\varphi(x, y, z, t) = 0$ avec le cône $t - t_0 = r$.

C'est un nouvel avertissement de la nécessité pressante de bien étudier *les cas d'applicabilité intégrale* du théorème de Cauchy.

L'étude des équations (B) est *plus simple* que celle des équations (A) (principe de Huygens).

V. — Extension de la méthode de Riemann a des équations d'ordre quelconque, a caractéristiques réelles.

M. Holmgren [1] a fait une très belle application de la méthode de Riemann. Soit une équation du troisième

Fig. 27.

ordre dont les trois caractéristiques sont réelles et ramenées, par un changement de variables, à être, à l'origine

$$dx = 0, \qquad dy = 0, \qquad dy = a(x, y)\,dx.$$

$$(1)\quad \begin{cases} F(z) \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + a\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_{20}p_{20} \\ \qquad + b_{11}p_{11} + b_{02}p_{02} + c_{10}p_{10} + c_{01}p_{01} + dz = 0. \end{cases}$$

---

[1] *Arkiv för Matematik, Stockholm,* 1904.

L'adjointe est

$$(2)\quad \begin{cases} G(u) \equiv -\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} - \dfrac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}au + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}b_{20}u + \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}b_{11}u \\ \qquad + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}b_{02}u - \dfrac{\partial}{\partial x}c_{10}u - \dfrac{\partial}{\partial y}c_{01}u + du = 0. \end{cases}$$

$$(3)\qquad uF(z) - zG(u) \equiv \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y},$$

$$M = zH_1 + \frac{\partial z}{\partial x}H_2, \qquad N = zK_1 + \frac{\partial z}{\partial y}K_2,$$

$$H_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}au - \frac{\partial}{\partial x}b_{20}u - \frac{\partial}{\partial y}b_{11}u + c_{10}u,$$

$$K_1 = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}au + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}b_{11}u - \frac{\partial}{\partial y}b_{02}u + c_{01}u,$$

$$H_2 = -\frac{\partial u}{\partial y} + b_{20}u, \qquad K_2 = -\frac{\partial}{\partial x}au + b_{02}u,$$

$$P = u\left(\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial}{\partial y}au + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + b_{11}uz.$$

Soit une courbe rencontrée en un seul point par chaque caractéristique OA, OB, OC. Pour tout contour fermé, on a

$$0 = \int\left(M + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy - N\,dx,$$

d'après (3), z satisfaisant à (1) et u à (2).

Le contour OCAO donne :

$$(4)\qquad \int_A^O M\,dy + P_O - P_A + \int_{OCA} = 0.$$

Le contour OBCO donne :

$$(5)\qquad \int_O^B -N\,dx + \int_{BCO} = 0.$$

Si l'on peut avoir M nul sur OA, N nul sur OB et *si* les intégrales suivant OC et CO *se détruisent*, (4) et (5) donnent :

$$P_O - P_A = \int_{AB}\left(M + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy - N\,dx.$$

Si, sur AB, sont donnés z et ses dérivés d'ordre 1 et 2, P_0 est *connu*.

Or ceci nous donne une équation du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} + a(x_0, y_0)\frac{\partial z}{\partial y_0} - z f(x_0, y_0) = P_0,$$

z étant connu sur BA.

Le problème sera résolu. Étudions ceci :

I. $H_2 = 0$ pour $x = x_0$.

Ceci donne $u(x_0, y)$ par une quadrature.

II. $H_1 = 0$ pour $x = x_0$, équation différentielle linéaire d'ordre 1 en $\frac{\partial u}{\partial x_0}$.

Donc nous pouvons annuler M. De même pour N.

III. Il nous faut étudier l'intégrale u de (2), avec ces données imposées :

$$u \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x_0} \quad \text{sur} \quad \text{OB},$$

$$u \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y_0} \quad \text{sur} \quad \text{OA}.$$

Lemme de M. Holmgren. — *Avec ces données, il existe une intégrale continue ainsi que ses dérivées* PREMIÈRES *dans l'angle* AOB; *les dérivées* SECONDES *seront discontinues sur la caractéristique* OC.

Prenons le cas simple

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}u = 0$$

ou

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = v,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

v est connu sur Ox, OC est caractéristique pour l'équa-

tion (γ). Donc, dans la région COB, nous avons une solution v_1 de (γ) ; v est aussi connu sur Oy ; donc, dans la région AOC, nous avons une solution v_2 de (γ).

Sur OC, $v_1 = \text{const.}$ et $v_2 = \text{const.}$

En effet, soit

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{(dérivée en } x\text{, sur OC)};$$

on a

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial x} v_1 = 0 = \frac{\overline{\partial}}{\partial x} v_2.$$

Donc v, solution de (γ), égale à v_1 dans une région, à v_2 dans l'autre, est *discontinu*.

Intégrons alors (β)

$$u = \int_0^x \int_0^y v(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \varphi(x) + \psi(y).$$

φ et ψ sont déterminés par les données ; u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont continus, mais $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = v(x, y)$ est discontinu.

C'est le lemme de M. Holmgren.

Pour le cas général, on mettrait un deuxième membre $f(x, y)$, dans (α) et (γ).

Puis on ferait des approximations successives.

Nous admettons donc que (2) soit intégré.

IV. Il reste à étudier les intégrales suivant OC qui a pour équation $dy = a\, dx$.

Dans $\left(M + \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ les dérivées secondes disparaissent. Donc cette partie de l'intégrale totale est nulle.

N contient le terme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\overline{\partial}}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

or $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continu sur OC. Donc, cette partie, aussi, est nulle.

Le problème est achevé, *sauf que* la question d'*approximations,* dans le cas général, est très délicate et qu'il faudra constamment, ou bien se placer *dans le domaine analytique,* ou faire, sur toutes les dérivées des fonctions données, des hypothèses voisines de celle d'analyticité.

Remarque.

M. Burgatti et M. E.-E. Levi [1] passent ensuite au cas général : équations à deux variables, d'ordre n, les n caractéristiques étant réelles et distinctes.

Il faut remarquer que M. Delassus [2] avait résolu le problème de Cauchy, les caractéristiques réelles se réduisant à *une* ou *deux* distinctes, pour l'équation à deux variables, d'ordre n.

De nombreux travaux devraient encore être mentionnés, en particulier ceux de MM. Le Roux [3], Bianchi [4], Nicoletti [5].

Nous ne pouvions donner ici que des aperçus [6].

PROBLÈME D'INVERSION D'ABEL. L'ÉQUATION INTÉGRALE DE M. VOLTERRA.

On a, sur les équations aux dérivées partielles des types *elliptique* ou *hyperbolique,* des résultats très considérables, de sorte que certains sont déjà devenus classiques.

Il n'en est pas de même pour le type *parabolique.*

---

(1) *Acc. dei Lincei,* nov. 1906, et mars 1908.

(2) *Thèse* (*Ann. de l'Ec. Norm.,* 1895).

(3) *Thèse* (*Ann. de l'Ec. Norm.,* 1894). — *Journal de M. Jordan,* 1898, 1900, 1903.

(4) *Acc. dei Lincei,* 1895, et *Leçons sur la Géométrie.*

(5) *Acc. dei Lincei,* 1895. — *Mem. Acc. di Napoli,* 1896.

(6) Voir : *Les équations à caractéristiques réelles* (collection *Scientia*), 1907. — I. Bendixson, *Arkiv för Matematik,* Bd. III. — A. Myller, *Société des Sciences de Bucarest,* 1908.

On s'en rendra compte en lisant la Leçon de M. Volterra ([1]), où il fait une synthèse originale des principaux résultats acquis touchant l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(z, t).$$

Mais il est très remarquable de voir que *les équations intégrales* paraissent devoir jouer, ici aussi, un rôle très considérable. (E. Holmgren, *Arkiv for Matematik*, 1906 et 1907. — *Voir* aussi Eugenio-Elia Levi, *Acc. dei Lincei*, 1907.)

Nous dirons donc un mot de *l'équation* de M. Volterra ([2]) et du beau *problème d'inversion* résolu par Abel, qui fut, là aussi, un grand précurseur.

PROBLÈME D'INVERSION D'ABEL.

1. Faisons une remarque, due à Dirichlet, sur une intégrale double étendue à l'aire d'un triangle formé par Oy, la première bissectrice, $y = x$, enfin par une parallèle à Ox, $y = a$.

Intégrons par tranches horizontales, puis par tranches verticales, nous avons

$$\int_0^a dy \int_0^y \mathrm{F}(x, y)\, dx \equiv \int_0^a dx \int_x^a \mathrm{F}(x, y)\, dy.$$

2. Cela posé, voici l'énoncé du problème d'Abel :

f est l'inconnue, g est donnée, et l'on a $0 < n < 1$ *pour que l'intégrale ait un sens. Il faut avoir*

$$\int_0^y \frac{f(x)\, dx}{(y - x)^n} = g(y).$$

([1]) V. Volterra, *Leçons* faites à Stockholm en 1906. — Poisson, *Théorie de la chaleur*, 1835. — P. Appell, *Journ. de Math.*, 1892. (En particulier, dans ce beau Mémoire, sont retrouvés des théorèmes d'Hermite sur des polynomes spéciaux.)

([2]) *Acc. di Torino*, 1896; *Acc. dei Lincei*, Roma, 1896.

La solution est aujourd'hui classique; on effectue sur les deux membres l'opération

$$\int_0^a \frac{dy}{(a-y)^{1-n}}$$

avec la remarque de Dirichlet. Grâce à la nature de la fonction F, on obtient de suite, k étant une constante,

$$k\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{g(y)\,dy}{(a-y)^{1-n}} = \mathrm{G}(a),$$

$$kf(a) = \frac{d\mathrm{G}}{da}.$$

3. Le problème est résolu. On doit remarquer qu'on a à dériver une intégrale à *élément infini* et que, par suite, le résultat est immédiat par l'emploi de la notion de *partie finie*. Nous représenterons la partie finie d'une intégrale infinie par $\overline{|\quad}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{G}}{da} &= \overline{\left| \int_0^a g(y)\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{(a-y)^{1-n}}\,dy \right.} \\
&= \overline{\left| -\int_0^a g(y)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(a-y)^{1-n}}\,dy \right.} \\
&= \overline{\left| -\left[\frac{g(y)}{(a-y)^{1-n}}\right]_0^a + \int_0^a \frac{g'(y)\,dy}{(a-y)^{1-n}} \right.} \\
&= \frac{g(0)}{a^{1-n}} + \int_0^a \frac{g'(y)\,dy}{(a-y)^{1-n}}.
\end{aligned}$$

La solution n'est *régulière*, à l'origine, que si g est nul en ce point.

L'ÉQUATION INTÉGRALE DE M. VOLTERRA.

1. Il y a deux équations intégrales fondamentales : f est l'inconnue, F et g sont donnés :

$$(\mathrm{E}_1)\qquad f(x)+\lambda\int_0^1 \mathrm{F}(x,y)f(y)\,dy = g(x)\qquad \text{(M. Fredholm)},$$

$$(\mathrm{E}_2)\qquad f(x)+\lambda\int_0^x \mathrm{F}(x,y)f(y)\,dy = g(x)\qquad \text{(M. Volterra)}.$$

La seconde se résout par des approximations successives :

$$(A)\quad \begin{cases} f_0(x) + 0 = g(x), \\ f_1(x) + \lambda \int_0^x F(x,y) \quad f_0(y)\,dy = g(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x) + \lambda \int_0^x F(x,y) f_{n-1}(y)\,dy = g(x). \end{cases}$$

Si les fonctions F et g sont *bornées,* les approximations convergent, quel que soit λ, et la solution est *unique.*

La même méthode ne réussirait, pour la première équation, que pour des valeurs *assez petites* de λ. Comme d'ailleurs M. Fredholm a montré que la solution est *méromorphe* par rapport à λ, on obtient, par les approximations, une sorte de limite inférieure du module du pôle λ_0 le plus voisin de l'origine.

2. M. Picard a mis en évidence que les approximations successives simplifient les beaux travaux de M. Volterra. Suivons ce mode d'exposition.

Dans (E_2) on posera

$$f(x) = f_0(x) + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) + \ldots,$$

d'où

$$f_0 = g, \qquad f_p(x) = -\int_0^x F(x,y) f_{p-1}(y)\,dy.$$

Si l'on a

$$|g(x)| < M, \qquad |F(x,y)| < N,$$

on a de suite

$$|f_p(x)| < M\frac{(Nx)^p}{\underline{|p}},$$

d'où la convergence, quels que soient M, N, λ.

Il y a aussi unicité de solution, car, soit $h(x)$ une solution *finie* de

$$h(x) + \lambda \int_0^x F(x,y)\,h(y)\,dy = 0;$$

nous avons donc

$$|h(y)| < P,$$

d'où

$$|h(x)| < |\lambda| \int_0^x NP\, dy = |\lambda| NPx,$$

ou bien

$$|h(y)| < |\lambda| NPy.$$

Revenons à l'équation par *itération*, d'où

$$|h(x)| < |\lambda|^2 \int_0^x PN^2 y\, dy = |\lambda| PN^2 \frac{x^2}{2}.$$

En général,

$$|h(x)| < P \frac{|\lambda N x|^p}{\underline{|p}},$$

quelque grand que soit p, d'où

$$h(x) \equiv 0.$$

3. On peut étendre ce résultat. *Supposons que la fonction* F *devient infinie, mais est intégrable.* On a l'équation

$$f(y) + \lambda \int_0^y \frac{f(x)\, dx}{(y-x)^n} = g(y) \qquad (0 < n < 1).$$

Les approximations reviennent à poser

$$f(y) = f_0(y) + \lambda f_1(y) + \lambda^2 f_2(y) + \ldots.$$

$$\left\{\begin{aligned} f_0(y) &= g(y), \\ f_1(y) &= -\int_0^y \frac{f_0(x)\, dx}{(y-x)^n}, \\ f_2(y) &= -\int_0^y \frac{f_1(x)\, dx}{(y-x)^n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On posera

$$x = yt, \qquad b = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^n},$$

et l'on trouvera, M étant une limite supérieure du module

de g :

$$\begin{cases} |f_1(y)| < M b y^{1-n}, \\ |f_2(y)| < M(b y^{1-n})^2, \\ |f_3(y)| < M(b y^{1-n})^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La convergence est assurée si l'on a

$$|\lambda| b y^{1-n} < 1.$$

Donc, si y est *assez petit,* il y a une solution et elle est unique. (Même raisonnement par itération.)

4. Il faut mentionner que le point de départ de M. Volterra a été, non point l'équation (E_2), mais bien celle-ci :

$$(V_1) \qquad \int_0^y G(x,y) f(x)\, dx = g(y).$$

Par dérivation en y, on retombe sur (E_2) si $G(y, y)$ ne s'annule pas ([1]).

5. Passons à un cas plus général :

$$(V_2) \qquad \int_0^y \frac{H(x,y)}{(y-x)^n} f(x)\, dx = \varphi(y).$$

Une intégration, suivie de dérivation, ramène encore à (E_2), comme l'a montré M. Volterra.

C'est très simple pour le cas, très général, où l'on a

$$H(x,y) = \sum_1^\infty h_p(x)\, g_p(y).$$

([1]) Si cette fonction s'*annule,* il faut, pour l'étude de ce problème, se reporter aux travaux suivants : V. VOLTERRA, *Annali di Matematica,* 1897. — E. HOLMGREN, *Soc. royale des Sciences d'Upsal,* 1900. — T. LALESCO, *Thèse* (*Journ. de M. Jordan,* 1908). Ce Mémoire est extrêmement intéressant. — *Voir* aussi une courte Note de l'auteur, Congrès de Rome, 1908. Notons que, dans sa Thèse, en 1894, M. Le Roux avait abordé ce genre de problèmes.

On emploie l'artifice d'Abel ([1]) : intégration avec la remarque de Dirichlet,

$$\sum \int_0^a h_p(x) f(x)\, dx \int_x^a \frac{g_p(y)\, dy}{(a-y)^{1-n}(y-x)^n} = \text{fonct. connue.}$$

Posant $y - x = t(a - x)$, nous remplaçons la variable y par t et nous intégrons, d'où

$$\int_0^a f(x)\left[\sum G_p(x, a)\, h_p(x)\right] dx = \Phi(a).$$

C'est une équation (V_1).

Elle se ramène à (E_2) si la fonction

$$\sum G_p(a, a)\, h_p(a)$$

ne s'annule pas.

Or, cette fonction est, à un facteur constant près,

$$\sum g_p(a)\, h_p(a) = H(a, a).$$

Donc, discussion encore si $H(x, x)$ s'*annule*.

([1]) M. Picard donne une autre solution, pour le cas où $H(a, a)$ ne s'annule pas, dans les *Comptes rendus* en 1904. M. Burgatti a résolu un problème plus général (*Acc. dei Lincei*, 1903).

On passe assez facilement au cas *non linéaire* (Lalesco), tandis qu'il n'en va pas de même pour l'équation de Fredholm.

CHAPITRE VI.

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES.

1. On donne l'équation

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = x\sin x + (a + bx^2)\cos x.$$

Établir, entre les constantes a, b, une relation telle que l'intégrale soit une fonction uniforme.

2. $F(x)$ étant holomorphe au voisinage de l'origine, trouver une solution, holomorphe autour de l'origine, pour l'équation

$$x^2y'' + 3xy' + y = F(x).$$

3. On donne

$$y' = Xy^2 + X_1,$$

X et X_1 sont fonctions de x seul, holomorphes à l'origine, et pour $|x| < a$, on a

$$|X| < M, \qquad |X_1| < M.$$

Dans quels champs, pour x et pour y, peut-on affirmer l'existence d'une solution holomorphe?

4. Étudier de même

$$y' = \frac{\sin x}{x^2 + y^2 + 3},$$

x et y restant dans des cercles de rayon 1, et de centres x_0, y_0; x_0 et y_0 étant réels.

5. Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + qy \tag{1}$$

une équation différentielle où p et q sont des fonctions de la variable x. On demande de trouver la relation qui doit exister entre ces coefficients p et q pour que l'équation (1) admette deux intégrales linéairement distinctes y_1 et y_2 liées par la relation

$$y_1 y_2 = 1.$$

Examiner le cas où l'on a

$$p = \frac{1}{x}.$$

Trouver le coefficient q et l'intégrale générale.

6. Soit l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

dont y_1 et y_2 représentent deux intégrales distinctes. Le rapport

$$z = \frac{y_2}{y_1}$$

dépend de trois constantes arbitraires, puisqu'on peut remplacer y_1 et y_2 par des combinaisons linéaires. Il satisfait donc à une équation du troisième ordre.

Former cette équation?

On a quatre relations homogènes en y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$. D'où

$$\frac{2\frac{dz}{dx}\frac{d^3z}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}.$$

7. On donne

$$dy - f(x, y)\,dx = 0.$$

Dans quel cas a-t-on un facteur intégrant de la forme

$$X(x)Y(y).$$

8. Trouver une courbe plane passant par l'origine O des coordonnées et telle qu'on ait, en tout point M,

$$R = \frac{s^2 + a^2}{2a},$$

R étant le rayon de courbure, s l'arc OM, a une constante.

9. Trouver une fonction analytique $f(z)$, holomorphe à l'origine, nulle avec z, et dont la partie réelle est

$$\frac{x(1 - x^2 - y^2)}{1 - 2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2}.$$

10. Calculer $\int P\,dx + Q\,dy$ le long d'un chemin AMB entourant l'origine. A a pour coordonnées 1,0. B est le point X, Y, situé dans le premier quadrant.

$$P = \frac{x\,\mathcal{L}(x^2 + y^2) - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$Q = \frac{y\,\mathcal{L}(x^2 + y^2) + x^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

11. Déterminer les deux facteurs $P(t)$ et $Q(t)$ de telle façon que la fonction y, représentée par la formule

$$y = (x - a)\int_b^x f(t)\,P(t)\,dt + (x - b)\int_a^x f(t)\,Q(t)\,dt,$$

soit une intégale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$$

pour toutes les formes possibles de la fonction $f(x)$.

12. Soient R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux d'une surface de révolution S en un point M de cette sur-

face, R_1 désignant le rayon de courbure correspondant au centre de courbure situé sur l'axe. On demande :

1° De former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la méridienne de S pour que le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ soit égal à une fonction donnée de l'angle φ que fait avec l'axe le plan tangent au point M à la surface S;

2° D'intégrer cette équation différentielle en supposant qu'on a

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{\cos\varphi} - 1,$$

m étant une constante donnée.

Cas où $m = 0$,

13. Intégrer le système suivant d'équations linéaires où λ désigne une constante :

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} - (\lambda+1)y - 2z + 2(1-\lambda)u = 0,\\
&\frac{dz}{dx} + \lambda y + z + 2(\lambda-1)u = 0,\\
&\frac{du}{dx} + \lambda y + (2\lambda-1)u = 0.
\end{aligned}$$

Examiner en particulier les deux cas où l'on a $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$.

14. Étudier la courbe

$$\begin{aligned}
x &= \beta\cos\alpha t - \alpha\cos\beta t,\\
y &= \beta\sin\alpha t + \alpha\sin\beta t,\\
z &= \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}t.
\end{aligned}$$

Trouver le rayon de courbure, le rayon de torsion, le rayon de la sphère osculatrice.

15. Calculer l'intégrale

$$J = \int [f(y)e^x - my]\,dx + [f'(y)e^x - m]\,dy$$

le long d'un chemin quelconque partant du point A sur Oy, arrivant au point B sur Oy, limitant avec l'axe Oy une aire de grandeur constante K.

16. Étudier la surface

$$x = u^2, \qquad y = uv, \qquad z = v^2 + 2u.$$

Le plan tangent coupe la surface suivant deux coniques.
Lignes de courbure. Lignes asymptotiques.

17. Trouver une solution de

$$(qy - z)^2 - x^2 p + y q^2 = 0$$

contenant la droite

$$y = z = 2x.$$

18. Trouver une solution de

$$z = px + qy + a\frac{y}{x}$$

contenant la courbe

$$z = 0, \qquad x^3 + y^3 + 3axy = 0;$$

Lignes asymptotiques.

19. Trouver une solution de

$$x(x^2 + y^2)p + 2y^2(px + qy - z) = 0$$

contenant la courbe

$$z = c, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

20. Trouver les surfaces de la forme

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

telles que la somme des projections sur Oz des deux rayons de courbure principaux varie proportionnellement au produit xy.



Lignes asymptotiques.

21. Intégrer

$$p^2 - 2pq + 2q^2 - 4z = 0;$$

solution contenant la courbe

$$x = 0, \qquad z = y^2.$$

22. Trouver les surfaces dont les plans $y = \text{const.}$ contiennent des lignes de courbure et qui, dans le plan yOz, se raccordent avec la surface

$$x^3 - 2x^2 - y^2 + z^2 - x - 1 = 0.$$

23. Intégrer

$$px + qy = z - x.$$

Trouver les lignes asymptotiques des solutions. Dans quel cas les projections de ces lignes sur xOy sont-elles orthogonales?

24. Intégrer

$$xy^2p + x^2yq = z(x^2 + y^2).$$

Dans quel cas les caractéristiques sont-elles lignes asymptotiques?

Trouver, dans ce cas, les surfaces coupant orthogonalement les surfaces intégrales.

25. On considère une sphère de rayon constant R dont le centre μ décrit une hélice Σ tracée sur un cylindre de rayon r.

On demande de déterminer l'arête de rebroussement de la surface enveloppe de cette sphère. On montrera qu'elle se compose de deux courbes distinctes S, S' jouissant des propriétés suivantes :

1° La sphère mobile a constamment un contact du second ordre avec les courbes S et S';

2° Les tangentes aux courbes S, S′ aux points M et M′ qui correspondent à un point μ de Σ sont perpendiculaires à la tangente en μ à Σ, et, respectivement aussi, aux droites $M\mu$, M'_μ;

3° La sphère de rayon R dont le centre décrit l'une ou l'autre des courbes S, S′ a un contact du second ordre avec la courbe.

Cas particulier où le rayon de la sphère mobile est celui de la sphère osculatrice à l'hélice.

26. Une surface rapportée à trois axes rectangulaires est représentée par l'équation $(x^2+y^2+z^2-a^2)^2 = 8a^2xy$; on demande :

1° De trouver les deux systèmes de lignes de courbure;

2° Pour un point arbitraire de la surface, de calculer les coordonnées des centres et les rayons de courbure principaux, qui correspondent à chacune des deux lignes de courbure passant par ce point;

3° Si le point donné décrit une ligne de courbure, de démontrer que le centre de courbure correspondant est fixe;

4° De déterminer le lieu de tous ces centres de courbure principaux.

27. On demande de calculer la valeur de l'intégrale curviligne

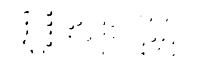
$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2}$$

prise, dans le sens positif, le long d'un contour fermé C comprenant l'origine à son intérieur; α, β, γ, δ sont quatre constantes, et l'on a

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

28. Calculer l'intégrale double

$$\int\int x^2y^3\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy,$$



étendue à la région du plan définie par les inégalités

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad x^3 + y^3 \leqq 1.$$

29. Sur une circonférence de rayon égal à n tracée dans le plan z et ayant l'origine comme centre, on prend n^p points situés aux sommets d'un polygone régulier de n^p côtés; l'un des sommets se trouve à l'intersection de la circonférence avec la partie positive de l'axe réel Ox.

Former une fonction univoque et holomorphe admettant pour zéros tous les points ainsi construits pour les diverses valeurs entières de n, de $n = 1$ à $n = \infty$.

30. Soit une surface S,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Exprimer x, y, z, p, q, en fonction de deux paramètres α, β, de façon à vérifier les équations

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \tag{1}$$

$$z - px - qy = \alpha, \tag{2}$$

$$y = \beta x, \tag{3}$$

$$p + \beta q = u(\alpha, \beta), \tag{4}$$

u est donné.

Si $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$, et dans ce cas seulement, la surface est une *courbe*.

Former, en α et β, l'équation différentielle des asymptotiques.

Lorsque $u = AB + \alpha B_1 + B_2$, A dépend de α seul; B, B_1, B_2 dépendent de β seul (les fonctions B sont *données* et A est *arbitraire*), la surface S vérifie une équation linéaire

$$Pp + Qq = R,$$

P, Q, R, sont fonctions de x, y, z.

Quelles sont les *caractéristiques* de cette équation?



31. Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires et une surface S dont le plan tangent en un point M coupe Ox en P et Oy en Q.

Trouver les surfaces S telles que les triangles OMP, OMQ aient *même aire*.

Soit γ une caractéristique de l'une des équations obtenues, autre que l'équation de certains cônes; on prend deux surfaces quelconques, Σ_0 et Σ_1, coupées chacune en un seul point par une courbe γ, et l'on prend un cylindre de courbes γ, découpant des aires correspondantes σ_0 sur Σ_0 et σ_1 sur Σ_1, ce qui détermine une surface fermée. Calculer l'intégrale, étendue à cette surface,

$$J = \int\int\left(\frac{\cos\alpha}{A} \pm \frac{\cos\beta}{B}\right) d\sigma,$$

A étant la distance d'un point à Ox, B étant la distance d'un point à Oy, α et β les angles de ces axes avec la *normale* à la surface.

32. Démontrer que la constante d'Euler a pour expression

$$C = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx.$$

On écrira $\frac{1}{n} = \int_0^\infty e^{-nx}\, dx$

$$\mathcal{L}\, n = \int_1^n \frac{dy}{y} = \int_1^n dy \int_0^\infty e^{-yx}\, dx.$$

33. Intégrale générale de

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

Voir la théorie des caractéristiques, qui donne

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = 0;$$

d'où la chaîne d'opérations

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial x} + \frac{\partial\theta_3}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = \theta_3,$$
$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - \frac{\partial\theta_1}{\partial y} = \theta_2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \theta_1.$$

34. Étudier l'équation

$$y = xy' + f(x)\sqrt{1+y'^2}.$$

Y a-t-il une solution singulière?
Cas particulier : $f(x) = ax + b$.

Note. — Rappelons que l'équation

$$f(x, y, y') = 0$$

ne peut avoir une solution singulière que si y et y' satisfont au système

$$f = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Soit $P(x, y) = 0$ une telle courbe, c'est *une singulière* si $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas identiquement nul pour la valeur y de x, tirée de $P = 0$.

Quand il n'y a pas de singulière, le résultant $Q = 0$ de $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, donne une courbe sur laquelle y' ne satisfait pas à l'équation différentielle et cette courbe est, en général, un lieu de *points de rebroussement* des solutions $F(x, y, C) = 0$ de l'équation (G. Darboux, *Bull. Sciences math.*, 1873; E. Picard, *Traité*, t. III).

35. Y a-t-il une solution singulière pour l'équation

$$ax^2y'^2 + 2xy(y-2a)y' - 2y^2(y-2a) = 0.$$

36. Étant donné dans un plan P un axe Ox, on demande de déterminer dans ce plan une courbe C, passant par le point O, telle que l'aire engendrée par la rotation d'un arc OM de cette courbe autour de Ox soit dans un rapport constant K avec l'aire engendrée par la rotation de la tangente MT autour du même axe.

(Examiner en particulier le cas où $K = \frac{4}{3}$.)

Sur les équations linéaires.

37. 1° *Rappel de deux formules.* — Rappelons deux formules d'un emploi constant. La solution de

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0$$

est

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(c - \int Q e^{\int P\,dx}\,dx\right).$$

Si l'on connaît *une solution* $y_1(x)$ de

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

la solution est

$$y = y_1\left(a + b\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}\,dx\right).$$

2° *Application.* — *Intégrer complètement* les équations différentielles des polynomes X_n de *Legendre* et des fonctions J_n de *Bessel.*

38. On considère l'équation aux différentielles totales

$$(1) \qquad dz = (Az^2 + 2Bz + C)\,dx + (A_1z^2 + 2B_1z + C_1)\,dy,$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont des fonctions des deux variables indépendantes x et y.

On demande de former les conditions auxquelles doivent

satisfaire les fonctions A, B, C, A_1, B_1, C_1, pour que l'équation soit *complètement intégrable*.

Ces conditions étant supposées satisfaites, expliquer comment on achèvera l'intégration de cette équation, si l'on connaît une ou plusieurs intégrales particulières.

Exemple. — Étant donnée une famille de courbes Γ, représentées dans un système d'axes rectangulaires, par les deux équations

$$(\Gamma) \qquad x^2 - 2z^2 = a, \qquad 5y^3 - 5x^2z^3 + mx^3z + 4z^5 = b,$$

si a et b sont des paramètres arbitraires et m un coefficient constant, on demande de déterminer ce coefficient m de façon que ces courbes Γ soient les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, et de trouver cette famille de surfaces.

39. *Application de la fonction de Green.* — 1° Trouver, sous forme d'intégrale double (la fonction de Green figurant sous le signe), la solution, *nulle* sur le contour, de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

2° Démontrer que, un point (a, b) s'approchant du contour C, *la solution* $u(a, b)$ *tend* vers la valeur donnée *zéro*. (C'est le seul point délicat.)

40. Soit une courbe gauche C, dont les coordonnées x, y, z sont des fonctions données de l'arc s.

En chaque point l'on considère une sphère de rayon donné, $r(s)$, ayant son centre sur C.

Trouver l'équation différentielle des *lignes de courbure* de l'*enveloppe* de ces sphères.

Puis on prendra les cas suivants :

1° La courbe C est *plane;*

2° r est constant;

3° r est proportionnel à z.

(*Voir* le paragraphe « Hypergéométrie » de ce Livre; s'inspirer de ce qui est fait là. En particulier l'enveloppe sera définie par s et l'angle θ.)

41. On considère les courbes gauches telles qu'on ait

$$x\,dy - y\,dx = a\,ds,$$

a est une constante, s l'arc de courbe.

Montrer que les normales principales de ces courbes rencontrent l'axe Oz.

Trouver les surfaces dont ces courbes sont les lignes de plus grande pente par rapport au plan xOy?

42. Étudier les caractéristiques de

$$\left(\mathrm{S}\,x^2 - a^2\right)(1 + p^2 + q^2) - (px + qy - z)^2 = 0.$$

Elles sont dans des plans qui coupent orthogonalement les surfaces intégrales. Trouver leurs développées.

Lignes de courbure des intégrales?

43. Soit une surface

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = \alpha v + \mathrm{U}(u).$$

Déterminer U de façon que l'une des familles d'asymptotiques soit formée par les trajectoires orthogonales des courbes

$$u = \text{const.}$$

Pour cette forme de U, trouver une *caténoïde* applicable sur la surface.

[L'alysséide ou caténoïde est la surface de révolution

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

C'est la seule *surface minima* de révolution.]

44. $\mathfrak{R}$ désignant *la partie réelle* d'un nombre complexe, ξ et ζ deux variables liées par la relation

$$\zeta^3 = \frac{\xi}{\xi^7 - 1},$$

la surface suivante est *minima*

$$x = \mathfrak{R}\,\frac{1}{2}\left[\xi + \frac{\zeta^2}{3}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{7}{5}\,\frac{\xi^6}{\xi^7 - 1}\right)\right],$$

$$y = \mathfrak{R}\,\frac{1}{2i}\left[\xi - \frac{\zeta^2}{3}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{7}{5}\,\frac{\xi^6}{\xi^7 - 1}\right)\right],$$

$$z = \mathfrak{R}\,\zeta.$$

(J. Hadamard, *Bull. Sc. math.*, 1902.)

45. Soit la surface

$$x = v\cos u, \qquad y = v\sin u, \qquad z = f(u) + v\,g(u).$$

Trouver les trajectoires orthogonales des *génératrices?*

Former l'équation des *asymptotiques.*

Intégrer lorsqu'on a

$$g = a\cos u + b\sin u$$

(a et b sont constants).

Dans ce cas, peut-on déterminer f de sorte que les asymptotiques aient pour projection sur le plan xOy des *cercles* passant par l'origine?

46. On donne *la partie réelle* $P(x, y)$ d'une fonction $f(z)$. Montrer que $f(z)$ s'obtient à l'aide de la fonction Ψ, si l'on a posé

$$P(x, y) = \Psi(z, z_0),$$

z_0 étant conjugué de z. (R. Alezais, *Nouv. Ann.*, 1907.)

47. Soit une surface telle que, sur une *ligne asymptotique,* on ait

$$s = \pm f(r) + C,$$

s étant l'arc d'asymptotique, r la distance d'un point de l'asymptotique à *un point fixe*, C une constante.

Cette surface est *de révolution*, ou bien elle est un cône. (G. Tzitzéica, T. Lalesco, *Nouv. Ann.*, 1907.)

48. Lignes asymptotiques de la surface lieu du milieu des *cordes* de la courbe

$$x = t^n, \qquad y = t^{n-1}, \qquad z = t^{n-2}.$$

(J. de Vries, *Nouv. Ann.*, 1907.)

49. *Note.* — I. Les diamètres conjugués de l'*Indicatrice de Dupin* fournissent les *lignes conjuguées* sur une surface. L'*une* de ces lignes a pour tangente l'intersection de deux plans tangents dont les points de contact sont infiniment voisins sur l'*autre*. Soient d et δ deux directions conjuguées; la même voie qui a donné

$$\mathrm{S}\, c\, d^2 x \qquad \text{(p. 3)},$$

donne

$$\mathrm{S}\, c\, d(\delta x),$$

d'où

$$\mathrm{D}\, du\, \delta u + \mathrm{D}'(du\, \delta v + dv\, \delta u) + \mathrm{D}''\, dv\, \delta v = 0.$$

Si les lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont conjuguées, on a

$$\mathrm{D}' = 0.$$

(*Voir* le théorème de M. Koenigs, G. Darboux, *Leçons*, t. I, p. 112.)

II. *Surface minima.* — La *somme* des rayons de courbure principaux est nulle, l'indicatrice est partout une *hyperbole équilatère*

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

Nous rappelons que, la surface étant rapportée à son plan

tangent,

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \frac{1}{\lfloor 3}\varphi_3 + \frac{1}{\lfloor 4}\varphi_4 + \ldots,$$

l'indicatrice est

$$\varphi_2 = 1.$$

50. Soient deux fonctions $X(x)$ et $V(v)$. Les déterminer de façon que les courbes

$$vx = \text{const.}, \qquad \frac{v+x}{1-vx} = \text{const.}$$

forment un réseau conjugué sur la surface E, enveloppe de

$$z + vy = (v - x)(V' - X') - 2(V + X).$$

Lignes asymptotiques?

51. Prendre un chemin d'intégration L tel que

$$y(x) = \int_L e^{zx} z^{a-1}(z-1)^{-a-1}\, dz$$

soit une solution de l'équation différentielle

$$x\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right) - ay = 0 \qquad (a = \text{const.}).$$

52. Étudier l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 + u^2 = F(v),$$

ayant posé

$$u = px + qy - z, \qquad v = \frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2}.$$

Former l'équation des caractéristiques dans leur plan.

53. Soit α un paramètre et soit une famille de courbes :

$$(1) \qquad f(x, y, \alpha) = 0;$$

on suppose que, pour chaque valeur de α, les équations (1),

(2), (3) ont *une solution commune* (ξ, η);

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

(3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Démontrer que, dans ces conditions :

1° Ou bien le point (ξ, η) est *fixe*;

2° Ou bien la courbe (1) a, en ce point, un contact du *second ordre* avec son enveloppe.

Trouver la condition telle que la seconde circonstance ait lieu.

Même problème avec une famille de surfaces :

(1) $$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

les équations (1), (2), (3) ayant une solution commune : une courbe.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

Notre *Bibliographie* est *très incomplète*.

Réparons ici quelques omissions :

(Nous indiquons surtout des Mémoires trop récents pour avoir trouvé place dans l'*Encyclopédie mathématique* en cours de publication.)

1° INTRODUCTION (p. 19). — M. LINDELÖF (*Journal de M. Jordan*, 1894) a complété, sur un point, la théorie de M. Picard. Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_h}{dx} = F_h(x, y_i) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

$$|F_h(x, y_i) - F_h(x, Y_i)| < \sum_1^n K_i |y_i - Y_i|.$$

(Condition Cauchy-Lipschitz.)

On obtient un nombre ρ'', à comparer à ρ',

$$\rho'' = \frac{1}{K}\mathfrak{L}\left(1+\frac{K}{M}\right); \qquad K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n.$$

(*Voir* E. COTTON, *Acta mathematica,* t. XXXI.)

2° CHAPITRE IV. — Pour l'équation de Fredholm nous devons encore citer les travaux de MM. GOURSAT, LEBESGUE, RIESZ, BATEMAN, de Mme LEBEDEFF, de MM. KELLOGG, WEYL, HELLINGER, HILB, LAURICELLA, ANDRAE, BOGGIO, etc., et une Note des *Comptes rendus,* de M. SANIELEVICI (juin 1908), conclusion des travaux de MM. H. WEBER, SCHWARTZ, POINCARÉ, PICARD, sur la vibration des *membranes.*

Pour le problème de Dirichlet et les questions connexes, nous devons citer :

C. NEUMANN, *Procédé de la moyenne arithmétique* (*Untersuchungen über das Potential,* Leipzig, 1877).

H. POINCARÉ, *Méthode du balayage* et travaux sur la *Méthode de Neumann* (*Le Potentiel,* 1899).

A. SCHWARTZ, *Procédé alterné. — Représentation conforme* (Werke, 1890).

D. HILBERT, *Méthode des variations.*

Travaux de MM. PICARD, KORN, STECKLOF, LIAPOUNOF, LINDEBERG, ROBIN, ERNST NEUMANN, ZAREMBA, LE ROY, KIRCHHOF, LEBESGUE, BEPPO-LEVI, FUBINI, etc.

Voir les livres de MM. HARNACK, PICARD, POCKELS, BÔCHER, RIEMANN, F. KLEIN, KORN, où l'on trouvera des indications sur les *travaux anciens* de LAPLACE, GAUSS, GREEN, W. THOMSON, LAMÉ, etc.

Citons aussi les travaux, sur les fonctions polyharmoniques, de MM. LEVI-CIVITA, ALMANSI, LAURICELLA, BOGGIO (*Acc. dei Lincei, di Torino; R. Ist. Veneto; Annali di Mat.*). — Sur les problèmes de l'*élasticité,* résolus par les équations intégrales, nous devons citer : I. FREDHOLM

(*Arkiv för Mat.,* 1905) et G. LAURICELLA (*R. Acc. dei Lincei,* 1906 et 1907).

Faisons enfin une observation, relativement aux problèmes de Dirichlet et Neumann (p. 134 et 135).

Pour le Problème de Dirichlet, *extérieur, dans le plan,* il y a une condition de possibilité. — *Dans l'espace,* il n'y a pas de condition, car l'on n'a qu'à ajouter une *simple couche* à la *double couche.* — Ceci se reflète parfaitement dans l'étude de l'Équation de Fredholm correspondante.

Voir, sur ces questions : H. POINCARÉ, *Le Potentiel newtonien* (p. 290, et 309). — J. PLEMELJ, Mémoires cités. — G. LAURICELLA, *Annali di Matematica* et *Nuovo Cimento,* 1907. M. Plemelj rattache à l'équation de Fredholm les *fonctions fondamentales* (H. POINCARÉ, p. 353).

3° CHAPITRE V. — Sur l'équation du type hyperbolique à n variables, M. HADAMARD vient de publier un important Mémoire (*Acta mathematica,* t. XXXI).

Je dois signaler une *omission* qui me concerne, due sans doute à ce que ce Mémoire a été *écrit* longtemps avant d'être *imprimé :* page 360, M. Hadamard signale comme *très difficile,* et n'ayant pas été fait encore, certain calcul de *dérivées secondes* que j'ai donné, de façon inattaquable, dans le *Journal de M. Jordan,* en 1906.

Relativement aux travaux de M. GOURSAT par les approximations successives, sur les équations du type hyperbolique à deux variables, je dois signaler que certains d'entre eux ont été repris par M. E. PICARD (*Comptes rendus,* 1907). M. Picard résout une équation intégrale *nouvelle* (du type *Volterra*). Puis, M. A. MYLLER a encore repris la question (art. cité et *Comptes rendus,* juillet 1908). Pour les équations du type *parabolique,* voir : FOURIER, *Œuvres,* 2 vol.; et POINCARÉ, *Propagation de la chaleur,* 1 vol.

Pour les problèmes de la *Physique* :

P. Duhem, *Leçons,* 2 vol. (Hermann, 1891).

Nous renvoyons enfin aux excellents articles de l'*Encyclopédie* (t. II), de *H. Burkhardt* et *F. Meyer,* de *A. Sommerfeld,* de *S. Pincherle.*

ERRATA.

Page 40, dernière ligne, *lire :*

$$H = \pi\left(\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right).$$

Page 113, paragraphe 5, il faut ajouter que les points i et e sont symétriques par rapport à s_0.

Page 115, ligne 9, *lire :*

$$x = \pm h\sqrt{3}.$$

Page 116, formule (2) [comme page 111, formule (7)], il est entendu que n est la normale *intérieure* à l'aire d'intégration.

Page 134, dans toutes les formules, remplacer l'angle ψ par $\omega = \pi - \psi$ (*voir* figure 14).

Page 160, ligne 6, *au lieu de :*

$$\overline{PQ} \text{ et } \overline{QR},$$

lire :

$$\overline{PQ} \text{ et } \overline{PR}.$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

I. — *Géométrie.*

II. — *Intégrales et séries* (domaine réel).

III. — *Fonctions d'une variable complexe.*

IV. — *Équations différentielles.*

V. — *Équations aux dérivées partielles.*

CHAPITRE I.

QUADRATURES.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES DIVERS.

CHAPITRE III.

TRANSCENDANTES CLASSIQUES.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE.

Introduction.

Pages.

Équation de Laplace.

L'équation intégrale de M. Fredholm.

CHAPITRE V.

Équations des types hyperbolique et parabolique.

INTRODUCTION.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

41292 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.